EUCLIDES



VAKBLAD VOOR DE WISKUNDELERAAR

NR.4

JAARGANG 94 - FEBRUARI 2019



Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

INHOUDSOPGAVE

EUCLIDES JAARGANG 94 NR4



IN DIT NUMMER

Guggenheim museum Bilbao (Spanje), architect: Frank Gehry.

Foto: Tom Goris.

ORGAAN VAN DE NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN

Kort vooraf

Het was in december weer een feest om als huisstatisticus van de NPO Radio 2 Top2000 de stemdata te analyseren op de meest uiteenlopende Fijne Feiten, zoals Frits Spits ze ooit is gaan noemen. Meest opmerkelijke feit: de toename van het aandeel 16-20 jarige stemmers, waar veel van onze leerlingen toe behoren: van 7,5% vorig jaar naar 10% dit jaar. Zie de figuur waarin de percentages per leeftijdscategorie te zien zijn.



Acht jaar geleden was een van de enquêtevragen: *Wat is of was je favoriete schoolvak* en tot verbazing van velen stond daar het vak wiskunde (na geschiedenis) op de tweede plaats. Inmiddels is er veel veranderd. Toen waren het nog enkele tienduizenden stemmers die de enquête hadden ingevuld, nu was dat een kwart miljoen. En was die ‘piek’ in de figuur bij de jongere stemmers niet half zo hoog. Kortom: tijd om die vraag nog een keer te herhalen... En wat blijkt: geschiedenis staat weer bovenaan, maar wiskunde nog steeds op de tweede plaats, gevolgd door Engels. Uitgesplitst naar mannen en vrouwen zien we een mooie verschuiving: bij de vrouwen stond acht jaar geleden wiskunde op de vierde plaats, nu op de derde. Mooi toch? En is de figuur nu een staafdiagram of een histogram? Dat weet je na het lezen van de bijdrage van Lonneke Boels in deze editie. En wat zegt deze (best grote) steekproef over de hele populatie? Misschien moet ik dan zelf ingaan op de oproep van Marianne van Dijke onderaan het artikel van Lonneke... Staan de open dagen bij jou ook weer voor de deur? Lees dan vooral eerst de Hoekstreep van Jan Beuving!

Tom Goris

WISKUNDIGE DENKACTIVITEITEN BIJ OPTIMALISEREN

Peter Kop
Rob van Oord
Erik van Barneveld
Marcel Voorhoeve

In de havo-vwo-werkgroep van de NVvW wordt regelmatig over wiskundige denkactiviteiten gesproken. In dit artikel laten drie leden van de werkgroep zien hoe zij wiskundige denkactiviteiten in vwo 5/6 bij wiskunde B vormgeven.

Inleiding

In de nieuwe examenprogramma's havo en vwo spelen wiskundige denkactiviteiten een belangrijke rol. Het cTWO rapport[1] heeft daartoe de aanzet gegeven en in diverse publicaties wordt aandacht geschonken aan het ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten.[2], [3] Ook de leerboeken zijn hierop aangepast en bieden opgaven aan die als denkactief bestempeld worden. Maar die staan vaak achter in een hoofdstuk/paragraaf en vaak is er nog een aantal tussenvragen om de leerlingen op weg te helpen. Daarbij hebben leerlingen ook vaak de beschikking over een uitwerkingenboekje. Het aanleren van wiskundig denken blijft dus een taak van de docent. Hoe leren we onze leerlingen wiskundig te denken? En hoe kun je als docent leidinggeven aan dat leerproces en zorgen dat leerlingen er vertrouwen in krijgen dat zij met behulp van hun wiskundige denkactiviteiten nieuwe niet-standaardopgaven op kunnen lossen? Dat gaat immers niet vanzelf.

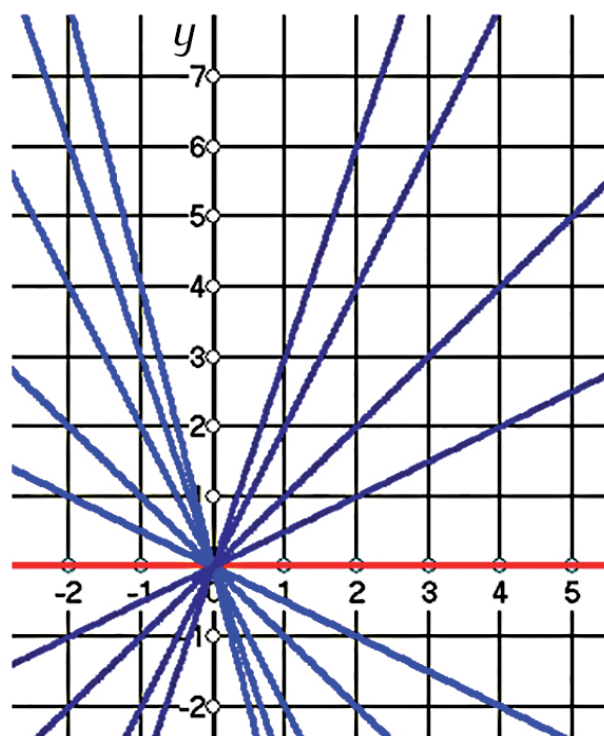
We kiezen voor een opgave die in een boek stond en halen de tussenvragen weg:

Gegeven is de functie $f(x) = -1/6\, x^2\, (x - 4)$
De lijn $y = ax$ snijdt de grafiek van f precies in twee punten. Bereken voor welke waarde(n) van a dit het geval is.

Docent A: in gesprek met een groepje leerlingen

Ik leg aan tweetallen leerlingen de volgende centrale vraag voor: Hoe pak je dit probleem aan?

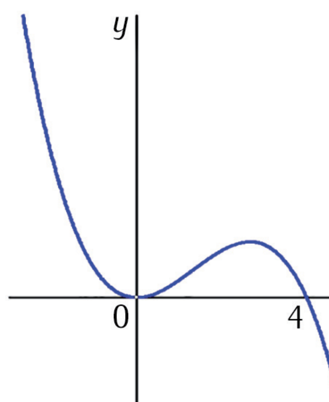
Met de volgende hulpvragen help ik de leerlingen verder, zodat er een dialoog ontstaat zoals hieronder beschreven (leerlingantwoord staat cursief):
Wat stelt $y = ax$ voor?
Een bundel lijnen door (0,0).
Die bundel lijnen noem ik een ster. Eén lijn door (0,0) hoort niet bij deze bundel, zie figuur 1.



figuur 1

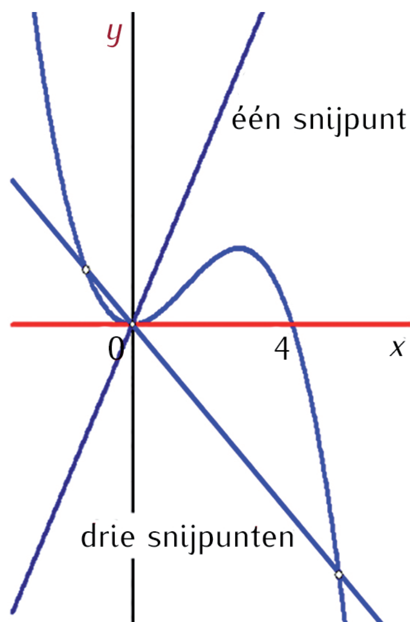
Welke, waarom?

Kun je een schets van de grafiek van f maken?
Die ziet er zo uit, zie figuur 2.



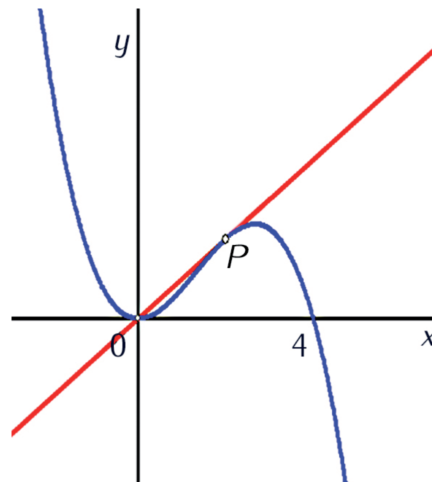
figuur 2

Is (0,0) een top van de grafiek?
Ja, want dubbel nulpunt (of iets met afgeleide)
Welke helling heeft de raaklijn daar?
0 natuurlijk!
Zie je nu al een van de mogelijke oplossingen van de centrale vraag?
Ja, de horizontale lijn door O is zo'n oplossing.
Nee?
Teken eens een paar lijnen door O. Hoeveel snijpunten met de grafiek hebben die veelal?
Drie. In elk geval alle lijnen met een negatieve helling ($a < 0$).
Welke lijn door *O* met precies twee snijpunten met de grafiek van *f* zie je al meteen? Waarom?
De horizontale, want (0, 0) is een top.
Er zijn ook lijnen die maar één snijpunt hebben. Kun je aangeven waar die zitten?
Ja, met grote hellingen. Zie figuur 3.



figuur 3

Dus?
Ergens is er nog een geval waarbij er niet één en geen drie snijpunten zijn, maar twee.
Wat kun je zeggen over die lijn?
Die gaat door O en moet dan ook nog raken aan de grafiek van f.
Als je een punt *P* op de grafiek neemt vlak bij *O* en je kijkt naar de lijn *OP*, wat zie je dan gebeuren met de helling als je *P* steeds verder naar rechts laat gaan?
De helling neemt eerst toe en daarna af, dus heeft een grootste waarde. En ja ... in dát punt zit de oplossing.
Lukt het om die lijn zo goed mogelijk te tekenen?
Ja ... (er ontstaat een schets als in figuur 4).



figuur 4

En nu moet je het punt *P* vinden bij die lijn. Daarvoor zul je moeten gaan rekenen. Begin met de *x*-coördinaat van *P* bijvoorbeeld $x_P = p$ te noemen, dan krijg je $P(p, f(p))$. Nu ben je op zoek naar de lijn *OP* met de maximale helling. Kun je die helling uitdrukken in *p*?
De helling (van een lijn) is $\Delta y / \Delta x = y_P / x_P = f(p) / p$.
Hoe nu verder?
Optie Calc Max gebruiken bij Y1 = f(x) / x
Of zonder grafische rekenmachine ... ?

Afgeleide m.b.v. quotiëntregel is $\dfrac{f'(p) \cdot p - f(p) \cdot 1}{p^2}$.

Dus oplossen $\dfrac{f'(p) \cdot p - f(p) \cdot 1}{p^2} = 0$

geeft $f'(p) \cdot p = f(p)$. *en dat geeft de waarde* $p = 2$.

Dus het antwoord op de centrale vraag is dan ....
$a = 0$ *en* $a = {}^4/_3$.

In het boek wordt bij het oplossen van de centrale vraag al heel snel de denkstap gemaakt, dat naast *O* het tweede snijpunt ofwel het snijpunt met de *x*-as is, ofwel het punt

$P(p, f(p))$ waarvoor geldt: $\dfrac{f(p)}{p} = f'(p)$, de uitdrukking

die overeenkomt met $f'(p) \cdot p = f(p)$. Om tot dit inzicht te komen is echt wiskundig denkwerk nodig. We mogen zeker niet van elke leerling verwachten dat dit denkwerk vanzelf ontstaat. Een dialoog als hierboven zal helpen dit denkwerk op gang te brengen. Eerst wordt de leerling geholpen bij het verhelderen van de probleemstelling. Daarna wordt het probleem stap voor stap aangepakt.

Het is belangrijk dat leerlingen zelf gaan leren vragen te stellen als:

Wat is het probleem?
Kan een schets mij helpen het probleem duidelijker te maken?
Kan ik de vraag herleiden tot een andere, kan ik de vraag herformuleren?
Wanneer is er een situatie die niet overeenkomt met wat gevraagd wordt?
Wat gebeurt er als je het punt P over de grafiek laat bewegen?
Treedt er een bekende wiskundige situatie op (in dit geval: uiterste waarde)?
Kan ik er een formule bij opstellen?
Welke wiskundige vaardigheden kan ik gebruiken?

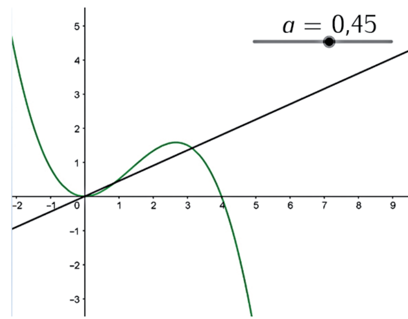
Door het expliciteren van dit soort vragen, hoop je dat leerlingen op enig moment dit soort vragen uit zichzelf gaan stellen, hetgeen een belangrijk aspect is van wiskundig denken.

Docent B: hele taak eerst

Ik schotel eerst het hele probleem voor aan mijn leerlingen: de hele taak eerst. Daarnaast is het nodig dat, zeker in het begin, leerlingen hulp op maat kunnen krijgen. Ik wil dat de leerlingen eerst uitgedaagd worden om het zelf te proberen. Als het niet lukt, moet er voldoende ondersteuning zijn. Naar mijn idee kunnen deze hulpmogelijkheden gaande het jaar enigszins worden afgebouwd. Als je een probleem uit een opgave uit het boek gebruikt, kun je de tussenvragen in de opgave of betreffende voorbeelden in het boek als hulp inzetten. Voor de centrale vraag in dit artikel laat ik mijn leerlingen in tweetallen werken. Deze werkvorm leidt ertoe dat ze steun hebben aan elkaar en dwingt ze met elkaar van gedachten te wisselen, hetgeen het wiskundig denken moet bevorderen. Daarvoor maak ik een aantal hulpkaarten, die ik voorin de klas leg (waar ze blijven) en die door een van de twee leerlingen bekeken kunnen worden. Elke hulpkaart heeft een volgnummer en een korte omschrijving.
Mijn hulpkaarten zien er als volgt uit:

Hulpkaart 1: de situatie weergeven in een tekening
Maak een schets van de situatie, dus een schets van de grafiek van $f(x) = -1/6\,x^2\,(x-4)$.
Teken daarna voor een aantal waarden van a de grafieken van $y = ax$. Lees nu voor enkele waarden van a af hoeveel snijpunten er zijn.

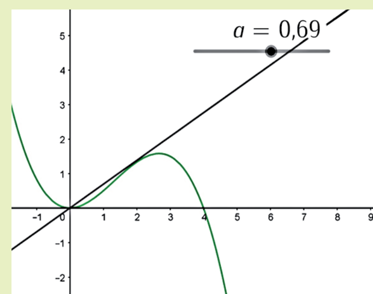
Alternatief voor hulpkaart I is het gebruik van GeoGebra met een schuifbalkje. Zie figuur 5, waarin je ziet dat er bij $a = 0{,}45$ drie snijpunten zijn.



figuur 5

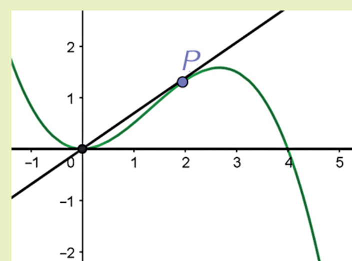
Hulpkaart 2: oplossingen schatten
Teken de situaties waarin er maar twee snijpunten zijn en lees waarden voor a af.
Lukt dat niet, bekijk dan hulpkaart 2A.

Hulpkaart 2A: een schets met twee oplossingen
a is ongeveer 0,69 en $a = 0$



figuur 6

Hulpkaart 3: naar een oplossingsmethode
Er zijn verschillende manieren om dit probleem op te lossen. Hier geven we er drie. Lees ze allemaal even door, kies er een en werk die uit.



figuur 7

Mogelijkheid 1: meetkundig
Het raakpunt noemen we P (met x-coördinaat p).
Hoe kun je de helling van de raaklijn op twee manieren berekenen? (namelijk via $\Delta y/\Delta x$ en via afgeleide)

Mogelijkheid 2: algebraïsch
De vergelijking $-1/6\,x^2\,(x-4) = ax$ moet precies twee oplossingen hebben.

Hoe los je dit soort vergelijkingen op?
Hoe zorg je ervoor dat er precies twee oplossingen zijn?

Mogelijkheid 3: analytisch
Je kunt ook het probleem vanuit punt P benaderen. Bekijk een punt P (met x-coördinaat p) op de grafiek van f. We stellen een raaklijn aan de grafiek in punt P op. Vervolgens kijken we wanneer deze raaklijn door (0, 0) gaat.

Ik laat de leerlingen hier zelf uit verschillende oplossingsmethodes kiezen. Als docent kun je natuurlijk ook aansturen op één oplossingsmethode.
De hulp is vrij concreet. Ook dat is een keuze van de docent die volgt uit de inschatting wat leerlingen aankunnen.
Nadat leerlingen aan de opgave gewerkt hebben, volgt een korte bespreking waarin zeker de volgende zaken aan bod komen:
Maak een schets van de situatie.
Welke strategieën lijken er mogelijk?
Welke strategie past bij jou en waarom?
En wat moet je van deze opgave meenemen (onthouden)?
Om snelle leerlingen te stimuleren zou ook naar verschillende oplossingsmethoden gevraagd kunnen worden in de opgave, bijvoorbeeld:
Gegeven is de functie $f(x) = -1/6\,x^2\,(x-4)$.
De lijn $y = ax$ *snijdt de grafiek van f precies in twee punten.*
Voor welke waarde(n) van a is dit het geval? Bedenk verschillende methoden om dit probleem op te lossen en werk deze uit.

Docent C: in groepje tot aanpak komen

Mijn lesplan zou grofweg als volgt zijn:

1. Ik maak groepjes van vier leerlingen en deel elke leerling een rol toe: gespreksleider, tijdsbewaker, notulist, rapporteur (tijdsduur: 5 minuten)
2. Ik deel de centrale vraag op papier uit en laat de leerlingen in 15 minuten de volgende opdracht uitvoeren:
   Je krijgt 15 minuten voor het volgende.
   Lees de centrale vraag en bespreek met elkaar wat er precies gevraagd wordt.
   Er zijn verschillende manieren om het probleem op te lossen. Bedenk één plan en beschrijf kort de aanpak. Je hoeft dus nog niet te gaan rekenen.
   Zorg dat je het met elkaar erover eens bent dat jullie plan tot een juiste oplossing van het probleem leidt.
3. Terwijl de groepjes bezig zijn, loop ik zelf rond om te inventariseren welke groep welke aanpak heeft bedacht. Daarbij geef ik in principe geen sturing aan het oplossingsproces.
   Als een groepje niet op gang komt, geef ik eventueel de suggestie om een schets te maken en/of een getallenvoorbeeld te bekijken.
   Verder maak ik hoogstens opmerkingen over het samenwerken in de groep.
4. Ik kies drie groepen met elk een verschillende aanpak en laat hun rapporteur vertellen hoe ze tot hun aanpak zijn gekomen en wat hun aanpak is (tijdsduur: 20 minuten). Als in de klas slechts één of twee aanpakken worden gevonden, vul ik zelf de ontbrekende aanpak(ken) aan.
5. Ik sluit af met overwegingen over de voor- en nadelen van de verschillende gepresenteerde aanpakken en geef als huiswerk op om een complete uitwerking te maken van alle drie de aanpakken (5 minuten).

Ten slotte

Polya[4] onderscheidt vier fasen bij het probleemoplossen, de denkactiviteit waar in bovenstaand voorbeeld een sterk beroep op wordt gedaan:

1. Het probleem begrijpen
2. Een plan ontwerpen
3. Plan uitvoeren
4. Terugkijken

In de aanpak van elk van de drie docenten A, B en C zijn deze fasen te herkennen. Allen zorgen ervoor dat leerlingen expliciet het probleem (fase 1) en hun strategie (fase 2) onder woorden brengen. Ook de laatste fase, het terugkijken, een fase waar in de onderwijspraktijk vaak nauwelijks aandacht aan wordt besteed, komt bij alle drie expliciet aan de orde. Het terugkijken op de gekozen aanpak en bedenken welke heuristieken je een volgende keer kunt inzetten zodat je in de toekomst effectiever en efficiënter aan de slag kunt, geeft grote winst op de lange termijn.
En voor docenten kan het zinvol zijn om na te gaan of de centrale vraag en de samenwerkingsopdracht om tot een oplossing te komen, aan alle eisen voldeed met vragen als:

– Was de centrale vraag en werkwijze duidelijk voor de leerlingen?
– Hadden de leerlingen voldoende (denk)gereedschap om het probleem aan te pakken?
– Heb ik voldoende zicht gekregen op het denken van de leerlingen?
– Aan welke heuristieken moet een volgende keer aandacht gegeven worden voor deze groep?
– Op welke andere manieren had ik dit probleem als wiskundige denkactiviteit aan leerlingen kunnen presenteren?

Wil je meer lezen over probleemoplossen en de vier fasen van Polya? Lees dan het artikel dat Paul Westerbeek op zijn blog heeft gepubliceerd.[5] Hij opent met de uitspraak van Nietzsche: *Toen ik moe was van het zoeken, leerde ik vinden.* Als docenten hebben wij de prachtige taak om onze leerlingen het vinden te leren. Met vallen en opstaan, maar recht op het doel af.

Noten

[1] cTWO. (2012). *Denken & doen: wiskunde op havo en vwo per 2015.* Utrecht: Universiteit Utrecht

[2] Streun, A. van & Kop, P. (2016), *Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten bovenbouw havo-vwo: implementatie examenprogramma's havo-vwo 2015.* Enschede: SLO. *https://www.slo.nl/organisatie/recentepublicaties/ontwerpendenkactiviteiten*

[3] Streun, A. van & Kop, P. (2017). *Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten onderbouw havo./vwo: implementatie examenprogramma's havo-vwo 2015.* Enschede: SLO. *(https://www.slo.nl/wda-onderbouw/)*

[4] Polya, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.

[5] Westerbeek, P. (2012). *Wie zoekt zal vinden.* (*www.paulwesterbeek.com/blog/wie-zoekt-zal-vinden-i/*)

Over de auteurs

Erik van Barneveld is docent aan de GSG Leo Vroman te Gouda. E-mailadres: *bar@gsgleovroman.nl*

Peter Kop is docent aan de GSG Leo Vroman te Gouda en vakdidacticus aan de universitaire lerarenopleiding ICLON te Leiden.
E-mailadres: *koppmgm@iclon.leidenuniv.nl*

Rob van Oord is (dit jaar) docent wiskunde aan het Emmauscollege te Rotterdam en voorzitter van de werkgroep havo-vwo. E-mailadres: *robvanoord@tiscali.nl*

Marcel Voorhoeve is docent aan de lerarenopleiding van de Hogeschool van Amsterdam.
E-mailadres: *m.j.f.m.voorhoeve@hva.nl*

DE HOEKSTREEP

OPEN DAG



Jan Beuving

De meest surrealistische ervaring die een leerling in zijn of haar middelbareschooltijd meemaakt is de open dag. (Je kunt overigens discussiëren over de vraag of de open dag bij de middelbareschooltijd hoort – je bezoekt die dag immers vóór je op de middelbare school zit. Overigens kun je natuurlijk discussiëren over het antwoord op die vraag, over de vraag discussiëren is aanmerkelijk minder interessant.) Maar die open dag dus. Er staat ineens een plant in de centrale hal, op de plek waar normaal een brugklasser tussen de broodkorsten ligt. Er liggen kleedjes op de tafel in de aula. Er staan bloemetjes op de kleedjes op de tafels in de aula. De conciërge blijkt een heel voorkomende, vriendelijke man te kunnen zijn. Net als je lerares Duits. De wc's zijn schoon. Bij Frans worden chansons gedraaid en stokbroodjes met Boursin geserveerd, en rode wijn en sinaasap... pardon, jus d'orange geschonken. Bij aardrijkskunde worden enorme atlassen van de kast gehaald die de andere 364 dagen boven op de kast blijven liggen. (In schrikkeljaren 365. Overigens zijn er ook scholen die twee open dagen achter elkaar hebben, op vrijdagavond en zaterdag, voor die scholen graag zelf de getallen aanpassen.) In het scheikundelokaal worden superspectaculaire proefjes gedaan die je zelfs in zes jaar gymnasium met N&T-profiel NOOIT MEER te zien krijgt. De school is veranderd in één groot toneelstuk. Heel de school? Nee, een klein hoekje biedt dapper weerstand tegen deze oprukkende volksverlakkerij, en dat is de sectie wiskunde. Die is namelijk al perfect van zichzelf.

De vraag die ik mij stel is: verliezen wij hier de slag, of winnen we hem juist? Wiskunde is een vak waarvan de faam de naam vooruitsnelt. Niemand gaat onbevooroordeeld de eerste wiskundeles in. Terwijl je eerste les Nederlands, laten we eerlijk zijn, daar ga je zitten en je denkt: eens zien wat dit is. Meestal val je in slaap voordat de woorden vos en Reynaarde gevallen zijn. Niemand heeft dat bij wiskunde. Een oudere zus of broer heeft je al gewaarschuwd. 'Het is iets anders dan rekenen. Het is heel moeilijk!'
Wij wiskundigen kunnen de wiskunde niet beter voordoen dan ze is. De vergrotende trap 'perfecter' is immers per definitie onjuist. Engels is handig, Nederlands noodzakelijk. Om Frans hangt de zweem van handig-voor-op-vakantie. (En het cliché 'mooie taal'.) Grieks en Latijn zijn zogenaamd erudiet. Biologie heeft de opwinding van seksuele voortplanting, natuurkunde en scheikunde kunnen leunen op de proefjes, maar wat hebben wij? Ruitjesoverhemden, publiek beleden nachtmerries, Matthijs van Nieuwkerk die aan tafel voor 1,3 miljoen kijkers koketteert met zijn ik-begrijp-er-niks-van-blik. En daarmee nog succes heeft ook.

Hoe gaan we dit tij keren? Door vrolijke dansjes te doen op de open dagen? Volgens mij is er een beter plan: we moeten infiltreren. Vroeger, in mijn tijd, kon je bij Frans of geschiedenis (of elk ander vak) aftrek krijgen van je proefwerkcijfer als je een fout maakte in je Nederlandse taal. Een d/t-fout kostte je punten. Waarschijnlijk zou je dat als leerling nu aan kunnen vechten. Maar in plaats van deze negatieve impuls, moeten we een positieve beloning instellen, als je wiskunde integreert in je andere proefwerken. Reken je bij een geschiedenisproefwerk uit hoeveel doden er per minuut vielen in de WO I-loopgraven? Kwart punt bonus! Merk je op dat het aantal ablativi in je Latijntoets een perfect getal is? Half punt erbij! Reken je het aantal manieren uit om Duitse naamvallen door de war te halen? Cijfer afronden in jouw voordeel! Wiskunde wordt dan de sleutel voor een succesvol middelbareschoolleven. Moet je eens kijken hoe druk het wordt op de open dagen bij je sectie.

Over de auteur

Jan Beuving is wiskundige en cabaretier. Vanaf 1 september speelt hij zijn nieuwe voorstelling *Rotatie*. Kijk voor de speellijst op *www.janbeuving.nl.*

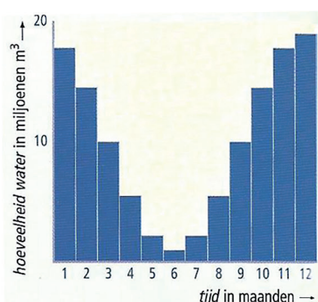
HET FIZIER GERICHT OP…

Lonneke Boels

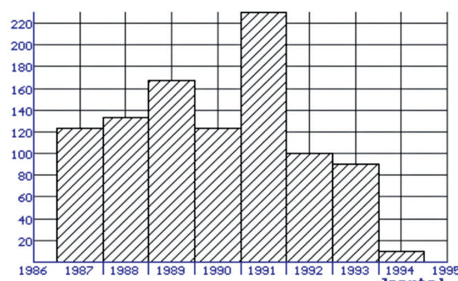
WAT ELKE WISKUNDEDOCENT ZOU MOETEN WETEN OVER HISTOGRAMMEN

In FIzier belicht een medewerker van het Freudenthal Instituut een thema uit zijn of haar werk en slaat hiermee een brug naar de dagelijkse onderwijspraktijk. Histogrammen worden veel gebruikt. Desondanks worden histogrammen vaak verkeerd begrepen. In dit artikel legt Lonneke Boels uit hoe dat komt en wat je er in de klas aan kunt doen.

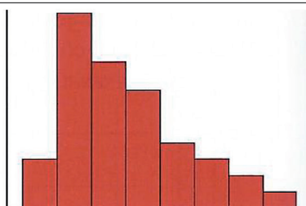




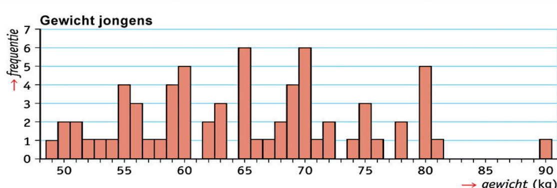
a *Moderne Wiskunde*, 11e editie, 5 vwo wiskunde A



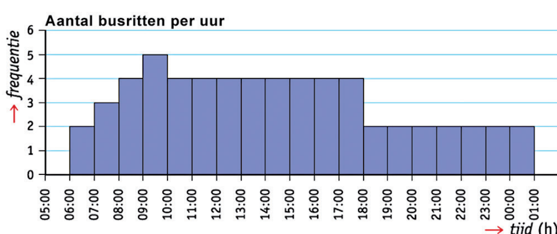
b Uitleg histogram op website *Wisfaq.nl*



c *Getal & Ruimte*, 11e editie, 4 havo wiskunde A



d *Mathplus*, 1e editie, havo en vwo wiskunde A



e *Mathplus*, 1e editie, wiskunde A

figuur 1 Welke grafieken zijn histogrammen?

Een quiz…

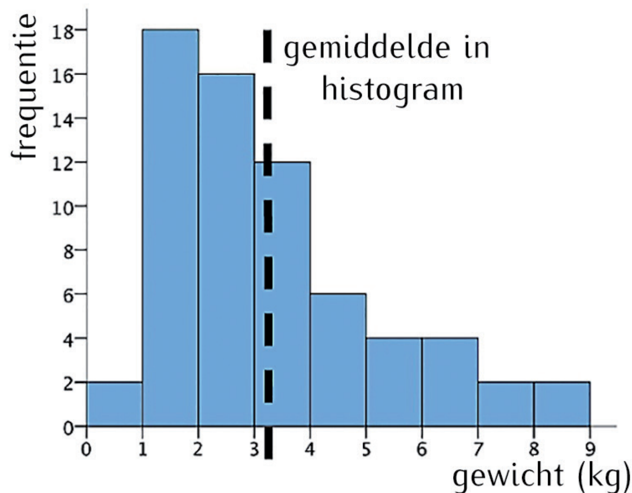
Histogrammen worden vaak verward met casus-staafdiagrammen, zelfs in schoolboeken. Daarom eerst een quiz. Welke van de vijf grafieken in figuur 1 zijn histogrammen? Je vindt het antwoord tussen de noten en de uitleg op de website…

Histogram versus casus-staafdiagram

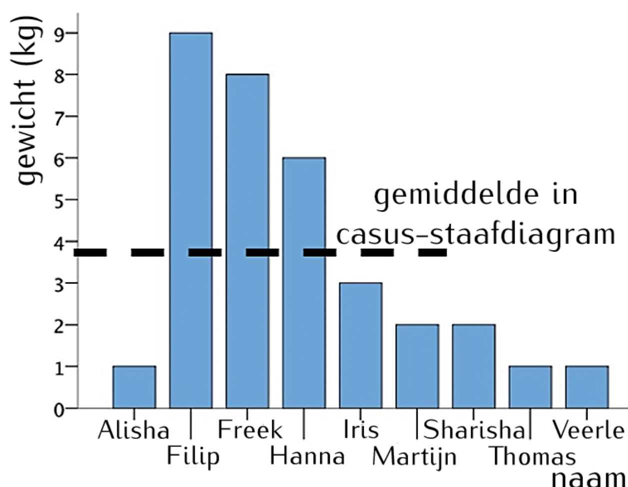
In figuur 2 is een histogram en in figuur 3 een casus-staafdiagram gegeven. In schoolboeken vind je hiervoor geen of onvolledige definities, daarom hier eerst een uitleg wat het belangrijkste verschil is tussen deze twee. Histogrammen zijn grafieken met één kwantitatieve variabele (interval of ratio meetniveau[1]).
Casus-staafdiagrammen zijn grafieken met staven waarin *twee* variabelen staan in plaats van één. In het casus-staafdiagram in figuur 3 staat langs de horizontale as een kwalitatieve variabele: de *namen* van leerlingen die strandafval hebben geraapt. Langs de verticale as staat de tweede variabele (kwantitatief): het *gewicht* van het geraapte afval. In het histogram staat de variabele *gewicht* van pakjes van een postbezorger.
Dat deze twee typen grafieken heel verschillend zijn, merk je als je naar het gemiddelde kijkt. In het casus-staafdiagram kun je het gemiddelde zien als een denkbeeldige horizontale lijn in de grafiek. In het histogram is het echter een verticale lijn die het zwaartepunt van de grafiek weergeeft (denk aan het evenwichtspunt van een wip of een balans), zie figuur 2 en figuur 3.

Oogmetingen

Voor mijn onderzoek heb ik een overzicht gemaakt van alle fouten die leerlingen maken bij het interpreteren van histogrammen. Daaruit ontstond het vermoeden dat sommige mensen naar een histogram kijken alsof het een casus-staafdiagram is.
Aan studenten werd de vraag gesteld: hoe groot is het gemiddelde gewicht in figuur 2 en 3? Terwijl zij daarover nadachten is hun oogbeweging gemeten. Uit die metingen, in combinatie met hun mondelinge uitleg achteraf, blijkt

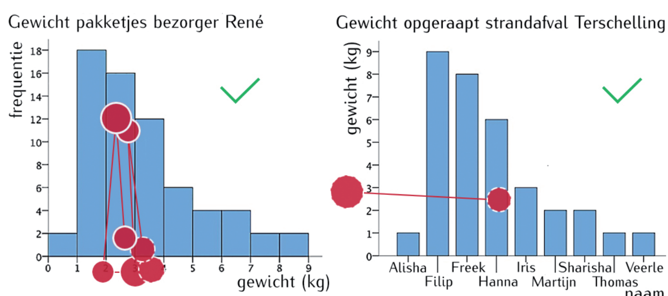


figuur 2 Histogram



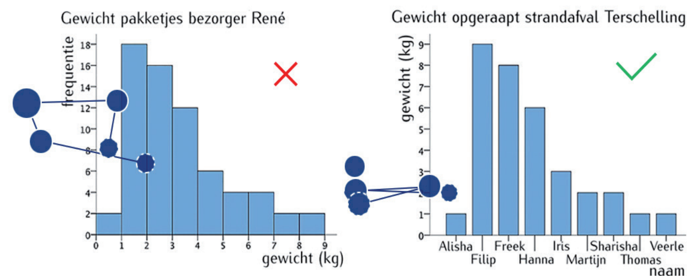
figuur 3 Casus-staafdiagram

dat sommige studenten casus-staafdiagrammen verwarren met histogrammen. De oogbewegingen van de studenten zijn in figuur 4 en 5 te zien.



figuur 4

In figuur 4 zijn de rode cirkels de gebieden waar de student zijn ogen op fixeert. Het groene vinkje betekent dat het de correcte manier is voor dit type grafiek, deze student interpreteert zowel het histogram (links) als casus-staafdiagram (rechts) correct.



figuur 5

In figuur 5 zie je de oogbewegingen van een student die het histogram (links) foutief interpreteert als een casus-staafdiagram (rechts) en daardoor het gemiddelde van de frequentie schat in plaats van het gemiddelde gewicht.

Adviezen

Wat kun je als docent aan deze misinterpretaties doen? Op basis van mijn onderzoek en ervaring kan ik de volgende adviezen geven:

1) Geef elk type grafiek zijn eigen naam. Naast het histogram en het casus-staafdiagram, kennen we ook het verdelingsstaafdiagram (één variabele; nominaal of ordinaal meetniveau[1]). Voorbeeld: een verdelingsstaafdiagram met bloedgroepen langs de horizontale as en frequentie langs de verticale as.
2) Gebruik een correcte definitie van histogrammen, zie kader 1.
3) Zoek gezamenlijk naar grafieken met staven in schoolboeken en kranten en sorteer deze naar type. Let daarbij vooral op het aantal variabelen en het meetniveau van die variabelen.
4) Laat zien dat je naar een histogram anders moet kijken dan naar een casus-staafdiagram zoals aangegeven in figuur 2 en 3.
5) Laat zien hoe je de gegevens uit een casus-staafdiagram omzet in een histogram door één variabele weg te halen.[2]
6) Besteed expliciet aandacht aan de misvatting dat twee assen altijd zou betekenen dat er twee variabelen zijn. Een programma zoals VUstat kan hierbij ondersteunen. Voor het maken van een histogram kies je namelijk één variabele uit je database!
7) Laat leerlingen bij de data zowel een dot-plot als een histogram maken. In mijn rubriek *wiskunde digitaal* ga ik hier binnenkort dieper op in.



SmartWiskunde

Maak kennis met *SmartWiskunde* op de NWD!



De volgende stap in wiskunde

SmartWiskunde is een nieuwe innovatieve blended wiskundemethode voor het vo. Stap voor stap wordt de methode ontwikkeld tot een volledige leerlijn voor alle niveaus en leerjaren vmbo en onderbouw havo/vwo.

Het digitale lesmateriaal van *SmartWiskunde* is naar wens te arrangeren en ook te koppelen aan de leerlijnen van bestaande methodes van andere uitgevers.

Inzicht tot in detail

Via het docentendashboard ziet u direct de aandachtsgebieden per klas of per leerling. Voor meer detail zoomt u in en ziet u de uitwerking met alle tussenstappen van een leerling.

Stapsgewijs met hints & feedback

De leerling werkt digitaal - net als in een wiskunde-schrift - opgaven stapsgewijs uit. *SmartWiskunde* herkent de gekozen oplossingsstrategie en geeft per stap waardevolle hints, feedback en uitleg.





Gratis pilot!

Ervaar de kracht van *SmartWiskunde* in de klas en meld één of meerdere klassen uit leerjaar 1 aan voor een gratis pilot. Voor meer informatie ga naar:

www.smartwiskunde.nl/aanvragen

Meer weten?

0513 65 7190 | support@eduhintovd.nl | www.smartwiskunde.nl

Wat is een histogram?

Dit is een grafiek met staven die voldoet aan de volgende eisen:

– Er is één variabele weergegeven; dat heet ook wel een univariate verdeling.
– Deze variabele staat langs de horizontale as (de staven staan dan verticaal).
– De variabele is bij voorkeur continu en wordt in groepen of intervalklassen weergegeven.
– Het meetniveau van de data is interval of ratio (in het examenprogramma van havo wiskunde A heet dat kwantitatief, maar feitelijk zijn dat twee meetniveaus[1]).
– Langs de verticale as staat de frequentiedichtheid (de relatieve frequentie gedeeld door de klassenbreedte). Als de klassenbreedten gelijk zijn, kan dit ook de (relatieve) frequentie zijn.

Let op: een veelvoorkomend misverstand is dat iedere grafiek met frequentie (of aantal) langs de verticale as een histogram is. Dat is alleen het geval als deze frequentie een telling is van wat er langs de horizontale as staat.

Kracht van het histogram

Als histogrammen dan zo lastig zijn, waarom besteden we daar dan tijd aan in het havo- en vwo-onderwijs? Kunnen we niet zonder? Nee, geen enkele andere grafiek maakt de verdeling van de data zo goed zichtbaar als een histogram. Verder is het histogram zelf niet zozeer het probleem, maar onderliggende kernconcepten zoals *dichtheid* van data, aantal variabelen en meetniveau. Het begrip van deze kernconcepten is niet zonder voorbeelden (grafieken) te leren. Daarmee is een histogram zelfs een goed diagnostisch instrument voor het opsporen van misvattingen over kernconcepten. Tot slot hebben we histogrammen nodig om de overgang naar continue kansverdelingen, zoals de normale verdeling, goed te kunnen maken. De tussenstap via histogrammen met frequentiedichtheid en ongelijke klassenbreedten ontbreekt helaas in de meeste schoolboeken. Wie over oude edities beschikt, kan ze daarin nog wel terugvinden.

Het goede nieuws is dat uit onderzoek van Pareja Roblin, Schunn en McKenney blijkt dat leerlingen van docenten die de verkeerde interpretaties van histogrammen kennen, betere resultaten behalen.[3] Mijn grootste wens is dan ook dat deze informatie in de docentenhandleidingen van de wiskundemethoden wordt opgenomen, net zoals dat nu al gebruikelijk is bij basisschoolmethoden.

Noten

[1] Boels, L. (2017). Kleintje Didactiek. Meetniveaus. *Euclides, 93*(3), pp. 28-29.

[2] Presentatie wiskundedialoog Nijmegen. *https://www.ru.nl/publish/pages/888103/boels_histogrammen_pres_nijmegen_jun_2018.pdf*

[3] Pareja-Roblin, N., Schunn, C., & McKenney, S. (2018). What are critical features of science curriculum materials that impact student and teacher outcomes? *Science Education*, *102*(2), pp. 260-282.

[4] Het antwoord op de quizvraag: alleen grafiek d is met zekerheid een histogram te noemen.


vakbladeuclides.nl/944boels_didactiek

Over de auteur

Lonneke Boels doet twee dagen per week promotieonderzoek onder begeleiding van Arthur Bakker, Paul Drijvers (Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht) en Wim van Dooren (KU Leuven). Haar onderzoek naar het verbeteren van statistische gecijferdheid van leerlingen via histogrammen wordt gefinancierd vanuit een promotiebeurs van NWO (CC BY-NC-SA 4.0).

Uitproberen lesmateriaal statistiek

Gezocht: enthousiaste docenten die les-materiaal bij een promotieonderzoek over omgaan met steekproef en populatie willen uitproberen.In *Euclides* 94-5 zal een FIzier verschijnen van Marianne van Dijke-Droogers over haar onderzoek naar de manier waarop vwo-3 leerlingen de relatie tussen steekproef en populatie leggen. Je kunt met je hele vwo-3 klas meedoen. Er worden 2 x 6 lessen in maart en mei 2019 over dit onderwerp verzorgd.
Zie *https://www.uu.nl/staff/MJSvanDijkeDroogers*.


vakbladeuclides.nl/944populatieensteekproef

FORMULES IN PLAATS VAN ALGEBRA IN HAVO-VWO

Anne van Streun

Richten we ons in de toekomst op de productieve vaardigheden of blijven we steken in de parate vaardigheden? Anne van Streun vraagt zich dit af maar houdt uiteraard een warm pleidooi voor het eerste: veel meer nadruk op de productieve vaardigheden en de daarbij behorende overkoepelende leerdoelen met een basis aan parate vaardigheden.

50 jaar curriculumvernieuwing

In 1964 stond ik voor het eerst voor de klas als wiskunde-leraar en 'mijn' eerste onderwijsvernieuwing van 1968 (havo-vwo, mammoet, moderne wiskunde)heb ik enthousiast omarmd. Net als nu het geval is bij *curriculum.nu* zijn sindsdien bij elke curriculum-vernieuwing mooie visies en langetermijndoelen geformuleerd, voorbeelden van opdrachten gegeven en in het verleden soms tientallen leerstofpakketjes ontwikkeld. Op basis van de leerstof (!) in de examenprogramma's bedenken auteursgroepen dan leerlijnen en hoofdstukken met heel veel opdrachten. De examenmakers kijken naar wat er in de leerboeken staat en durven daar niet al te ver van af te wijken. Soms blijft er wel wat van de bedoelde visie en langetermijndoelen over, maar vaker is er weinig van terug te vinden. De leerstofdoelen zijn dominant en bepalen de inhoud van de schoolboeken. Terecht wijst de NVvW in haar reactie op documenten van *curriculum.nu* op de noodzaak een *samenhangend curriculum* te beschrijven, waarin langetermijndoelen en leerstof met elkaar zijn verbonden. Anders wordt het rijtje van leerstofgebieden (domeinen) leidend en richten de leerlijnen in de schoolboeken zich weer uitsluitend op het doen verwerven van *parate kennis* en *parate vaardigheden*. Maar hoe komen we tot zo'n samenhangend curriculum, waarin bijvoorbeeld wiskundige denkactiviteiten zijn geïntegreerd in de leerstofopbouw? Daar gaat het in dit artikel over.

Wiskundig denken

Ver voor mijn geboorte (dus voor de Tweede Wereldoorlog) betoogde mw. Ehrenfest al dat in het wiskundeonderwijs van die tijd het *niet-denken* werd bevorderd door de voordoen-nadoen-oefenen didactiek van leraren en schoolboeken.

'Iedere leerling kan men laten beleven, wat het is, op het eigen verstand *vertrouwend, een* eigen inzicht *in een voor hem begrijpelijk gesteld probleem te vormen en, eventueel, ook een eigen oplossing te vinden. En dit is des te gemakkelijker, hoe minder gecompliceerd het probleem is; dus niet eerst aan 't eind van de cursus, maar in het begin. Daardoor wordt tevens de gelegenheid tot het oefenen in het* niet-denken *uitgeschakeld! Hoe meer de leerling het opbouwen van de leerstof meebeleeft, des te meer gelegenheid krijgt hij om het denken te oefenen en des te meer wordt de leerstof zijn eigen bezit.'*
(Ehrenfest-Afanassjewa[1], 1960)

In de syllabi bij de nieuwe examenprogramma's havo-vwo worden de overkoepelende leerdoelen als volgt verwoord:

- Met parate vaardigheden wordt hier bedoeld de wiskundige basistechnieken die de kandidaat *routinematig* moet beheersen.
- Bij *productieve vaardigheden* is het uitgangspunt dat de kandidaat beschikt over de parate vaardigheden en deze in complexe probleemsituaties kan toepassen. De productieve vaardigheden voert de kandidaat *niet op routine* uit. De kandidaat zal door inzicht, overzicht, probleemaanpak en metacognitieve vaardigheden een strategie moeten bedenken om het probleem op te lossen.

Leerlingen kunnen in de opbouw van een onderwerp ervaren dat zij voor hun 'nieuwe' situaties zelf kunnen aanpakken, er zelf over kunnen nadenken en zo hun productieve vaardigheden kunnen ontwikkelen. In het bronnenboek *Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten onderbouw havo/vwo*[2] noemen we die eerste verkennende fase *exploreren*, een fase die moet leiden tot inzicht in de structuur van een fase van het nieuwe onderwerp (van *exploreren* naar *structuur*).

Formules centraal

Tegelijk met de invoering van de basisvorming (1993) is het wiskundig curriculum voor 12-16 jarigen geformuleerd. In het vmbo is de klassieke algebra (rekenen met letters, haakjes uitwerken, haakjes plaatsen, ontbinden in factoren enz.) vervangen door het werken met formules (tabellen, formules interpreteren in een context of een grafiek, formules maken enz.) met een stevig accent op lineaire formules.
In *Moderne Wiskunde* vmbo krijgen de leerlingen bijvoorbeeld in leerjaar 1 als werkmethode de rekenpijlen en pijlenkettingen aangereikt, die ze zelf eerst kunnen verkennen (van exploreren naar structuur) en tot het eindexamen gebruiken, zie figuren 1 en 2. Vergelijkingen worden opgelost door 'links en rechts hetzelfde doen' of door inklemmen. Het 'meebeleven' van de opbouw en daarmee het 'oefenen van het denken' (Ehrenfest), is hier heel goed mogelijk.

Bert berekent voor het schilderen een uurtarief van € 38,-.
Zijn voorrijkosten bedragen € 19,-.

a Hoeveel euro rekent Bert als hij vier uren schildert?
b En als hij zeven uren schildert?
c Vul de regel in woorden die hierbij past verder in.
Het aantal uren keer ... plus ... is gelijk aan de kosten in euro's.
d Maak de pijlenketting bij de regel in woorden.

IN-getal — UIT-getal
aantal uren —× ...→ ... —+ ...→ kosten

e Bereken hoeveel euro het kost als Bert acht uren komt schilderen.
f Schrijf de formule bij de pijlenketting op.

figuur 1 Rekenpijlen als methode om formules te maken. (*Moderne Wiskunde 1 vmbo*)

Die leerlijn in het vmbo past uitstekend bij een overkoepelend globaal leerdoel voor het gebied van formules in het gehele voortgezet onderwijs).

Formules

Leerlingen moeten de betekenis van formules in een context of grafiek kennen of niet-op-routine kunnen identificeren, formules kunnen maken bij een context of grafiek en uit de structuur van een formule het globale verloop van de grafiek kunnen beschrijven.

'DE VERNIEUWING OP HET GEBIED VAN FORMULES, VARIABELEN EN VERGELIJKINGEN STRANDT AL VIJFTIG JAAR OP HET REKENEN AAN KWADRATISCHE VERBANDEN.'

In het vmbo ligt het zwaartepunt bij de lineaire formules en in de bovenbouw havo-vwo gaat het over alle mogelijke formules. In wiskunde A blijkt het interpreteren van formules in contexten, tabellen en grafieken voor leerlingen helemaal niet zo eenvoudig te zijn.
Het onderzoek van Peter Kop[3] laat zien dat leerlingen in 5 en 6 vwo met wiskunde B nog grote moeite hebben om uit de structuur van een niet-standaardformule enige kenmerken van de grafiek op te maken. De vraag is of met name de huidige inhoud van de onderbouw havo-vwo wel goed aansluit op de doelen van de bovenbouw.

Voorbeeld

Los de vergelijking $250 - 3 \times a = 139$ op.

1 Pijlenketting
$a \xrightarrow{\times -3} \ldots \xrightarrow{+250} 139$

2 Omgekeerde pijlenketting
$a \xleftarrow{:-3} \ldots \xleftarrow{-250} 139$

3 Berekening
$139 - 250 = -111$ en $-111 : -3 = 37$
Dus de oplossing is $a = 37$.

4 Controle
$250 - 3 \times 37 = 139$ Klopt

figuur 2 Rekenpijlen als methode om vergelijkingen op te lossen. (*Moderne Wiskunde 4 vmbo*)

Kwadratische formules

In de onderbouw havo-vwo strandt de vernieuwing op het gebied van formules, variabelen en vergelijkingen al vijftig jaar op het rekenen aan kwadratische verbanden. Haakjes wegwerken, haakjes plaatsen, ontbinden in factoren, kwadraat afsplitsen, *abc*-formule, allemaal nodig om de technieken van kwadratische verbanden te beheersen?! En wat hebben onze leerlingen daaraan in de bovenbouw havo-vwo?
Kijken we naar de eindexamens (!) havo-vwo wiskunde A dan gaat het ook daar uitsluitend over formules die moeten worden geïnterpreteerd, gemaakt of herleid.
Een enkele keer moeten de haakjes in een tweeterm keer een tweeterm worden weggewerkt of een formule worden herleid ('links-en-rechts-hetzelfde-doen'). In de havo wiskunde B-examens komen wel tweedegraads vergelijkingen voor die soms kunnen worden ontbonden, soms al kant-en-klaar in de vorm $2(x-1)^2 - \frac{1}{2} = 3\frac{1}{2}$ staan of alleen met de *abc*-formule kunnen worden opgelost. Voor vwo wiskunde B geldt hetzelfde. In leerjaar 4 wiskunde B havo-vwo worden al die technieken weer herhaald.

Terug naar onze overkoepelende doelen voor formules. Kwadratische formules interpreteren in contexten? Het maken van kwadratische formules in contexten (maximale oppervlakte van een schilderij, enzovoort) is een vorm van probleemoplossen. Over de kennis van kwadratische formules moet je dan al beschikken. Van onze overkoepelende doelen blijft alleen het interpreteren in termen van kenmerken van de grafiek over en eventueel het maken van een formule bij een gegeven grafiek. En uit die wisselwerking tussen kwadratische formules en grafieken moet blijken dat leerlingen relevante wiskundige denkactiviteiten kunnen laten zien bij de aanpak van niet-routineopdrachten.
Laten we ons globale leerdoel nu eens concreet vertalen naar enkele opgaven die de leerlingen aan het einde van 3 havo-vwo paraat moeten kunnen oplossen. We kiezen voor het interpreteren van kwadratische formules in kenmerken van de grafiek, zonder die tijdrovende technieken waar het gros van de leerlingen helemaal niets aan heeft in de bovenbouw, zie figuur 3.

Oefening 5.2.2.1.a *Schets de parabool*

Schets van de volgende parabolen de ligging ten opzichte van de x-as.
Leg uit waarom die schets goed is.

a.	$y=x^2-4$	d.	$y=-\frac{1}{4}x^2+6x-36$
b.	$y=(x-4)^2$	e.	$y=5+(x+3)^2$
c.	$y=-3x^2-2x+1$	f.	$y=(x-3)(5-x)+6$

figuur 3 Schets de ligging van de parabool
(naar *Getal & Ruimte* algemene herhaling 3 havo)[2]

Passend in ons globale leerdoel zouden de leerlingen uit de structuur van de formules in a, b, e en f direct de coördinaten van de top kunnen berekenen. De opgaven c en d moeten dan maar met de discriminant en/of de top-formule worden opgelost.

Oefening 5.2.2.1.b *Kwadratische vergelijkingen*

Los de volgende vergelijkingen op. Rond zo nodig af op twee decimalen.

Hint:
Kijk eerst goed of je de oplossing snel, zonder veel rekenwerk, kunt vinden. Dat kan bij 5 van de 8 vergelijkingen.

a.	$(2x+5)(2x-6)=26$	e.	$2x-(x-6)^2=16$
b.	$(11x+3)^2=16$	f.	$6x^2+20=32$
c.	$5x^2+1=20$	g.	$(7x+1)(6x-1)=7x+1$
d.	$42-(2x-1)^2=26$	h.	$0{,}1x^2-0{,}2x=8$

figuur 4 Kwadratische vergelijkingen
(naar *Getal & Ruimte* 3 havo algemene herhaling)[2]

Toch een prachtig leerdoel als alle leerlingen dit kunnen! Alleen de structuur van een formule kunnen analyseren en de *abc*-formule kennen. Voor alle leerlingen relevant. Natuurlijk brengt het gros van onze leerlingen in 3 havo-vwo hier weinig van terecht, omdat ze niet over de *productieve vaardigheid* beschikken de structuur van een niet-standaardformule te analyseren.

Samenhangende doorlopende leerlijn

In de publicatie van Ehrenfest[1] wordt een leerlijn die past bij dit leerdoel met dozijnen voorbeelden uitgewerkt. Met het maken van een tabel als hulpmiddel (of GeoGebra) kunnen de leerlingen zelf alle mogelijke vormen van kwadratische formules exploreren en zelf conclusies trekken over de kenmerken van de bijbehorende parabool (van *exploreren* naar *structuur*). Hebben ze die opbouw zelf meegemaakt, dan kunnen ze met succes zoeken naar kenmerken bij *niet-routine* kwadratische formules.
De beoogde leerlijn formules bevat nu lineaire formules (structuur, tabel, context, grafiek), kwadratische formules (structuur, tabel, grafiek), exponentiële formules (structuur, tabel, context) en allerlei formules (structuur, tabel, grafiek, context). Uit wiskunde A zijn genoeg mooie contextopgaven met allerlei formules te halen die leerlingen de kans geven hun *productieve vaardigheden* te laten zien. (Oh ja, ze kunnen niet ontbinden in factoren en kwadraatafsplitsen. Dat scheelt al snel een paar hoofdstukken.)

Overkoepelende doelen

Net als voor het leergebied van formules moeten, conform het advies van de NVvW, overkoepelende doelen voor andere leergebieden (b.v. verhoudingen) worden geformuleerd met een doorlopende leerlijn, waarin de leerstofdoelen en de wiskundige denkactiviteiten (de *productieve vaardigheden*) zijn vervlochten. Die contouren zijn nog helemaal niet in zicht. Het risico op een simpele herdruk van de bestaande edities van de schoolboeken is groot.

Noten

[1] Ehrenfest-Afanassjewa, T. (1960). *Didactische opstellen wiskunde*. Zutphen: Thieme.
(Dit is een uitgave van verzamelde artikelen, deels van voor WOII.)

[2] Streun, A. van, Kop, P. (2017). *Ontwerpen van wiskundige denkactiviteiten onderbouw havo/vwo* (SLO *http://www.slo.nl/wda-onderbouw*).
(Dit is een bronnenboek met meer dan honderd voorbeeldopgaven en leerlijnen onderverdeeld in *Van exploreren naar structuur*, *Van kennis naar probleemoplossen* en *Van exploreren naar redeneren/abstraheren*.)

[3] Zie *https://www.universiteitleiden.nl/onderzoek/onderzoeksprojecten/iclon/kop-algebraic-schemes*

Over de auteur

Anne van Streun is gepensioneerd wiskundeleraar, vakdidacticus wiskunde en hoogleraar aan de Rijksuniversiteit Groningen.
E-mailadres: *avstreun@euronet.nl*

WIS EN WAARACHTIG

Deze rubriek is een impressie van zaken die van belang zijn voor docenten wiskunde. Wilt u een wetenswaardigheid geplaatst zien, uw collega's op de hoogte brengen van een belangwekkend nieuwsfeit dat u elders heeft gelezen of verslag doen van een wiskundige activiteit? Stuur ons uw tekst, eventueel met illustratie. De redactie behoudt zich het recht voor bijdragen in te korten of niet te plaatsen. Bijdragen naar *wisenwaarachtig@nvvw.nl*

Slecht begrip statistiek gevolg van vaste denkwijzen?

De manier waarop statistiek en kansrekening wordt onderwezen op scholen en universiteiten zou de oorzaak kunnen zijn van het feit dat men vaak eenvoudige oplossingen voor statistische problemen over het hoofd ziet en kiest voor ingewikkelder oplossingen. Dit kan ernstige gevolgen hebben bij professionele omgevingen zoals rechtszaken. Een onderzoek gepubliceerd in *Frontiers in Psychology* toont voor de eerste keer dat *fixed mindsets* - mogelijk veroorzaakt door suboptimale onderwijscurricula - tot problemen leidden om de eenvoudige oplossing voor statistische problemen te vinden.

We worden dagelijks geconfronteerd met kansen en statistieken. Deze worden meestal gepresenteerd als percentages (d.w.z. 10% van de populatie), maar een meer intuïtieve manier om deze informatie te begrijpen is het presenteren ervan als natuurlijke frequenties, dus als twee hele getallen zoals bijvoorbeeld in '1 op de 10 mensen'. 'Hoewel natuurlijke frequenties veel gemakkelijker te begrijpen zijn, zijn mensen meer vertrouwd met kansen vertegenwoordigd door percentages vanwege hun opleiding', zegt Patrick Weber van de Universiteit van Regensburg, Duitsland, die de studie leidde met collega's Karin Binder en Stefan Krauss.

Hoewel mensen meer vertrouwd zijn met waarschijnlijkheden, betekent dit niet dat ze er beter in zijn om ze te begrijpen. 'Een recente meta-analyse liet zien dat de overgrote meerderheid van mensen problemen heeft om een taak op te lossen die wordt gepresenteerd in termen van kansen', zegt Weber. 'Dit kan leiden tot ernstige misvattingen bij toepassing in professionele omgevingen.'

Meer hierover in de bron: *www.sciencedaily.com/releases/2018/10/181012082713.htm*

Uitreiking ScienceMakers Award 2018

Ruim 140 jongeren in de leeftijd van 10 tot 18 jaar ontvingen op woensdag 14 november 2018 een *ScienceMakers Award* in museum Corpus in Oegstgeest. De ScienceMakers Award wordt uitgereikt om jongeren te belonen voor hun prestatie op het gebied van wetenschap, techniek en maken. Het Techniekpact wil hiermee waardering voor hun talent onderschrijven en andere jongeren inspireren voor wetenschap en techniek. Een greep uit de projecten:

Eureka!cup: het *Newman Trio* bedacht een klein apparaat dat door rioleringsbuizen kan kruipen en criminelen in huis kan 'afluisteren'. Ze bouwden een prototype en brachten mooi in kaart hoe het proces precies is gegaan.

First® Lego® League: *Pretty Smart Power* girls bedachten een slimme waterbesparende douchebak om het grote tekort aan schoon drinkwater in de toekomst op te lossen. Dat deden ze door het grootste verbruik in huis aan te pakken; douchen en de wc doortrekken. Ze bedachten een douchebak die douchewater geschikt maakt om de wc mee door te trekken.

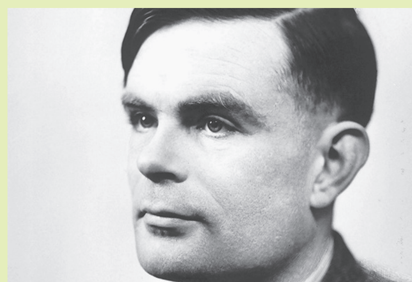
Artcadia, Imagine Your Future: de *Parkwachters* bedachten het slimste park, met slimme prullenbakken, parasols met zonnecellen en ook picknicktafels die met de zon energie opwekken.

International Conference of Young Scientists (ICYS): met hun profielwerkstuk bedachten de studenten die deelnamen aan de Van Melsenprijs (Radboud Universiteit Nijmegen) en de Jan Kommandeurprijs (Rijksuniversiteit Groningen) een paar mooie innovaties. Zoals een duurzaam alternatief voor traditionele stoeptegels ontwikkeld van schimmels en een longboard van gerecyclede materialen. Voor optimale prestaties van laser zeilboten speciale hydrofoils en een geïntegreerde knipperlichtinstallatie voor racefietsen.

Bron: *www.primaonderwijs.nl/nieuws/uitreiking-sciencemakers-award-2018*

Huidpatroon haai verklaard door theorie van Turing

De zogeheten reactie-diffusie-theorie van Alan Turing wordt in brede wetenschappelijke kring erkend als een methode om de verscheidenheid aan patronen in het dierenrijk te verklaren: van de strepen van de zebra tot de veren van de kip. Eind jaren vijftig verklaarde Turing aan de hand van wiskundige regels hoe de unieke patronen in de vacht van dieren kunnen ontstaan. Britse onderzoekers hebben nu aangetoond dat de theorie ruimer toepasbaar is dan tot nu toe werd aangenomen.



Alan Turing (1912 – 1954)

Ze stellen dat daarmee ook de verdeling van de tandachtige schubben – huidtanden – over de huid van haaien kan worden verklaard. De huid van de haai heeft eigenschappen die ervoor zorgen dat het dier zich met geringe weerstand door het water beweegt. De huid is bedekt met duizenden puntige huidtandjes, die op elke plek van het lichaam variëren in vorm en omvang. Met de achterwaarts gerichte plaatjes voelt de huid aan als schuurpapier.
Bron: *de Volkskrant, 12 november 2018*


Henk Pfaltzgraff

Henk Pfaltzgraff overleden

Henk Pfaltzgraff is op 16 oktober jl. overleden. Henk was wiskundeleraar en conrector aan het Zaanlands Lyceum en was ook na zijn pensioen actief als wiskundedocent voor volwassenen en ondersteuner van rekenonderwijs voor kinderen. Hij was rond 1990 nauw betrokken bij de ontwikkeling van de wiskunde B-examens. Henk was de laatste jaren vooral bekend om zijn strijd vóór gedegen rekenonderwijs en tégen de rekentoets.
Bekend was www.henkshoekje.com, de website waarop Henk onder andere allerlei programma's voor de grafische rekenmachine (TI-84) publiceerde. Henk schreef Zebraboekjes over het experimenteren met rijen en kansen met behulp van de grafische rekenmachine. Van zijn hand was ook de Spijkerreeks, een reeks van zeven, door uitgeverij Epsilon uitgegeven, boekjes waarmee leerlingen vanaf groep 6 tot aan het examen havo/vwo zich de juiste wiskundige basiskennis kunnen verwerven.
Henk Pfaltzgraff werd 79 jaar.

Bron: *WiskundE-brief 28 oktober 2018*

BOEKBESPREKING



Adri Dierdorp

WIE IS ER BANG VOOR WISKUNDE?



Titel: Wie is er bang voor wiskunde?
Auteur: Gerardo Soto y Koelemeijer
Uitgever: Amsterdam University Press (2018)
ISBN: 978-94-6298-839-2, 180 pagina's, paperback
Prijs: € 17,99 Ook verkrijgbaar als ebook, ISBN 978-90-4854-044-0; € 8,99

Wie is er bang voor wiskunde? bestaat uit een aantal interessante essays, waarin Gerardo Soto y Koelemeijer, auteur van o.a. *Wiskundigen mogen niet huilen*, ons weer een frisse blik gunt op verschillende aspecten van de wiskunde. De titel van het boek verwijst naar het eerste essay. Om maar met de deur in huis te vallen, ik miste een beetje een voorwoord waarin de aard en de structuur van het boek wordt toegelicht. Voor de lezer die Soto y Koelemeijer niet kent is het immers prettig vooraf te weten dat de diverse essays min of meer losse verhalen zijn, dat er geen strikt logische rode draad is, dat bijvoorbeeld essay 2 niet noodzakelijkerwijs voortborduurt op essay 1.

Wiskundeangst

Dat eerste essay is zeer lezenswaardig en bijzonder interessant voor wiskundedocenten. Het behandelt namelijk een problematiek waar ze alle, vroeg of laat, in de lespraktijk mee te maken krijgen: namelijk, de al dan niet bewuste angst die bij velen (en niet alleen bij middelbare scholieren) leeft ten aanzien van wiskunde. De auteur maakt aannemelijk dat deze angst niet noodzakelijk het gevolg is van een gebrek aan talent. Tevens neemt hij ons mee naar wetenschappelijk onderzoek, waarbij MRI-scans haar aantoonbaar maken. En...
bijzonder nuttig: hij verwijst naar allerlei onderzoek dat wordt gedaan om haar te bestrijden.

Hierna komt de rol van de docent uitgebreid aan de orde in 'Wat kunnen docenten doen?' Een eerste advies dat de auteur hen meegeeft is redelijk voor de hand liggend: ze dienen hun pupillen naast de wiskundige ook metacognitieve vaardigheden bij te brengen. In deze sectie wreekt zich enigszins de vaagheid over de doelgroep die de auteur met zijn boek op het oog heeft. De titel 'Wat kunnen docenten doen?' impliceert mijns inziens een focus op de rol van de docent. Dat betekent dat het kopje van de paragraaf: 'Hoe kun je het beste leren' dan ook beter had kunnen luiden: 'Hoe kun je een leerling het beste laten leren?'. In dit deel van het boek draagt de auteur een aantal oplossingen aan, zoals: 'retrieval practice'. Hij vertelt nauwkeurig wat dit inhoudt. Een beetje jammer is wel dat de bronvermelding ontbreekt. Een tweede zeer bruikbare tip is het vertellen van verhalen, waardoor leerlingen niet alleen emotioneel betrokken raken, maar ook cognitief gestuurd worden. Voor wie hier meer over wilt weten verwijst hij naar zijn vorige boek.
Een derde tip behelst 'het verminderen van angst door de test te veranderen' (p. 31). Hier legt de auteur de nadruk op 'summatief toetsen'. Leerlingen zouden voldoende tijd dienen te krijgen voor hun toetsen. De oplossing is eigenlijk heel simpel: óf kortere testen óf meer tijd voor de leerling. Dit pleidooi benadrukte de auteur tijdens het vraaggesprek dit jaar op 12 juli in het radioprogramma van BNNVara naar aanleiding van het verschijnen van deze bundel. Het laatste deel van dit essay bevat nog tal van andere interessante en bruikbare onderwijstips. Niet alle claims van de auteur zijn echter even degelijk onderbouwd en bevatten bronvermelding. Een voorbeeld: 'We kunnen nu wel begrijpen waarom iedereen in het onderwijsveld zich vastklampt aan de growth/fixed mindset theorie. ...... Het is zorgelijk dat veel docenten (wiskunde) deze theorieën kritiekloos aannemen. (p. 38).' Het eerste essay wordt afgesloten met een oproep aan de overheid om het beroep van wiskundedocent aantrekkelijker te maken. Dat kan door zowel vermindering van werkdruk (minder lesuren) als een ruimhartigere financiële vergoeding. Meer studenten zullen dan voor het beroep kiezen, hetgeen de kwaliteit van het onderwijs ten goede zal komen. En goed onderwijs is volgens de auteur dé oplossing om de wiskundeangst bij leerlingen effectief te bestrijden, een gedachte die ondergetekende van harte onderschrijft.

Wiskundewonderkind

In Essay 2 maken we kennis met het wiskundewonderkind Terence Tao, The Mozart of Math, en wordt nader ingegaan op de begrippen 'wonderkinderen en genieën'. Lenhard Ng (1976) wordt ons ten tonele gevoerd, waarschijnlijk mede omdat deze bekende mathematicus Tao persoonlijk heeft ontmoet. De auteur neemt de lezer mee langs Tao's levenspad om hem ten slotte te laten uitkomen bij diens werk. De wiskundige uitwerkingen die nu volgen roepen ook hier de vraag op voor wie het boek vooral bestemd is. Het niveau van de wiskunde varieert namelijk sterk. Daarbij helpt het niet dat het lezen van sommige passages zo nu en dan behoorlijk wordt bemoeilijkt door typografische slordigheden (in mijn druk). Indices bijvoorbeeld worden niet altijd even consequent aangegeven. De auteur blijft zijn opdracht trouw en verzuimt niet de lezer een hart onder de riem te steken: het is niet nodig om een genie te zijn om wiskundige te worden. Waar het op aankomt, is... hard werken! In de laatste paragrafen maakt hij duidelijk waarom de Fieldsmedaille winnaar Tao hem zo aanspreekt: 'Iemand met zijn kennis en overzicht, met zijn snelheid van denken, zijn bescheidenheid, die het ook nog eens betekenisvol vindt om zeer simpele materie goed door te nemen om het nog beter uit te leggen, is wat mij betreft een goede docent (p. 81).'
Genoeg stof tot nadenken voor ons, lezers uit het onderwijsveld, zou ik zeggen.

Veranderingen in de wiskunde

In Essay 3 bespreekt de auteur 'bewijzen in de wiskunde'. Via de geschiedenis, en allerlei min of meer bekende stellingen en bewijsvormen (stelling van Thales, Keplers vermoeden, direct bewijs, volledige inductie, bewijs uit het ongerijmde, bewijs door gevalsonderscheiding, bewijs door constructie, en het duiventilprincipe) gaat hij in op de huidige rol van computers bij bewijsvoering. Het essay eindigt met een mooie beschouwing over het effect van de ontwikkeling van de wereld op wiskundig bewijzen. Essay 4 gaat door op de ingeslagen weg met de 'veranderingen in de wiskunde die de wiskunde veranderen'. Wederom, via de geschiedenis van de wiskunde uit de Griekse tijd, komen wij aan bij het begrip 'verandering' en bij wiskundige verandering. Denk hierbij aan afgeleiden en differentiaalvergelijkingen. Daarna volgen veranderingen van de wiskunde zelf, zoals paradigmaverschuivingen. Hierbij speelt bewijsvoering weer een belangrijke rol. In de conclusie van dit essay wijst de auteur nogmaals op het belang van geschiedenis van de wiskunde.

Tot slot

Mijn conclusie, na het lezen van *Wie is er bang voor wiskunde?*, is dat het hier gaat om een boek dat onze aandacht ruimschoots verdient. Sommige essays zijn misschien wat meer geschikt voor beginnende studenten, maar met name het eerste essay zou verplichte kost moeten zijn voor iedereen die de wiskunde een warm hart toedraagt. Wellicht vindt de auteur het een uitdaging om in de toekomst dit essay verder uit te werken tot een heel boek.

Over de auteur

Adri Dierdorp was 32 jaar wiskundedocent in het middelbaar onderwijs. Tegenwoordig is hij onder andere betrokken bij het Freudenthal instituut, de NHL Stenden hogeschool, de werkgroep NLT en de Stichting DUDOCnetwerk. E-mailadres: *a.dierdorp@uu.nl*

WISKUNDE DIGITAAL

FORMATIEF TOETSEN

Lonneke Boels

Formatief toetsen is in. Maar waar vind je goed lesmateriaal? Een voorbeeld is het Mathematics Assessment Project. De website van dit project staat vol met suggesties voor formatief toetsen, zelfs complete lesplannen, PowerPoint-presentaties en nog heel veel meer. Lonneke Boels bespreekt materiaal over exponenten.

Lessenserie exponenten

Voor dit artikel heb ik een willekeurige lessenserie uitgekozen: exponenten (rekenregels machten) voor klas 2 havo/vwo (*grade 8*). De rekenregels van de machten worden in deze korte lessenserie van 2,5 lessen opgehaald (geschatte tijd voor alle onderdelen is 115 minuten). Er zijn actieve werkvormen bedacht en formatieve toetsen. De formatieve toetsen zijn meestal kort, zo'n 10 - 15 minuten. De leerdoelen zijn van de lessenserie zijn:

- ophalen van eigenschappen en rekenregels van machten;
- juiste rekenregels of eigenschap kunnen selecteren en correct gebruiken;
- zonder rekenmachine machten kunnen uitrekenen.

De pdf van deze lessenserie en de PowerPoint (beide in het Engels) zijn als bijlage op de website van de NVvW bij dit artikel gevoegd. De kern wordt gevormd door twee lessen (90 minuten totaal). Voorafgaand aan deze twee lessen geef je een formatieve toets en na deze twee lessen opnieuw een vergelijkbare formatieve toets om leerlingen te laten weten wat ze hebben geleerd. De uitleg over de lessenserie begint - na de specifieke leerdoelen - met het beschrijven van de *Common Core Standards* die erbij horen; dat zijn in de Verenigde Staten een soort globale leerdoelen voor onder- en bovenbouw. Er staat ook welke materialen je nodig hebt en een korte beschrijving van de lessenserie. Daarna wordt elk onderdeel apart beschreven in een mogelijk lesplan.

Properties of Exponents

1. In each of the following questions write the missing exponents on the dotted lines.
Show your reasoning in the spaces provided on the right.

a) $2+2+2+2=2^{\cdots}$

b) $2\times2\times2\times2=2^{\cdots}$

c) $2^{\cdots}\times2^3=2^6$

d) $2^3\times3^3=6^{\cdots}$

e) $4^3=2^{\cdots}$

f) $(3^{\cdots})^3=3^6$

g) $5^6\div5^2=5^{\cdots}$

h) $5^2-3^2=2^{\cdots}$

i) $3^5\div3^{\cdots}=3^{\cdots}=\frac{1}{3}$

2. Write these five numbers in order of size, from smallest to greatest:

6^0 0^6 3^2 2^3 7^{-1}

Smallest				Greatest

Show your reasoning here:

figuur 1 Voorbeeld van een formatieve toets die voorafgaand aan de lessenserie wordt gegeven

Formatieve toets

De formatieve toets in figuur 1 geef je in een les voorafgaand aan de twee lessen waarin de kennis wordt opgehaald en uitgebreid. Er staan ook tips bij hoe je dit nakijkt: namelijk om er geen cijfer of score voor te geven maar er vragen bij te stellen. Uit onderzoek blijkt namelijk dat het geven van een cijfer leidt tot onderling scores vergelijken en leerlingen afleidt van de vraag hoe ze hun wiskunde kunnen verbeteren. Er staan per type fout enkele vragen die je erbij kunt schrijven. Mocht dat te tijdrovend blijken, dan kun je de belangrijkste vragen ook op papier zetten en per leerling markeren welke voor die leerling relevant zijn of ze aan het begin van de les op het bord zetten en klassikaal bespreken.

Actieve werkvormen

Er staan meerdere actieve werkvormen beschreven, onder andere met mini-whiteboards. Voor de actieve werkvorm in figuur 2 knippen leerlingen de kaartjes uit en leggen alles bij elkaar dat gelijk aan elkaar is; er kunnen meer dan twee kaarten bij elkaar horen. Daarna wordt dit op een poster geplakt. Vervolgens gaat één leerling uit de groep op bezoek bij andere groepen en blijft de rest bij de poster om vragen erover te beantwoorden. De opdracht voor de bezoekende leerling is om de oplossingen van de eigen

Card Set: Expressions

E1 $2^2 \times 3^2$	E2 $3^2 - 2^3$
E3 $2^2 + 2^3$	E4 $2^2 \div 2^3$
E5 $6^8 \div 6^4$	E6 $2^2 - 2^2$
E7 $3^2 + 3^3$	E8 $4^2 \div 2^3$
E9 $2^3 \div 2^{-2}$	E10 $(2^3)^2$
E11 3×2^2	E12 $2^3 \times 2^3$
E13 $5^2 - 3^3$	E14 $(3^2 \times 2^2)^2$

Card Set: Single Exponents

S1 2^1	S2 2^5
S3 $(-2)^1$	S4 2^{-1}
S5 2^0	S6 2^6
S7 6^4	S8 6^2
S9 0^2	S10 4^3

figuur 2 Een actieve werkvorm die leerlingen in groepen maken

groep te vergelijken met die van anderen en bij verschillen uit te zoeken hoe dit komt. In het klassengesprek ligt de nadruk op het begrijpen van de rekenregels van de machten en niet (alleen) het mechanisch goed kunnen toepassen. In de vervolgles volgt weer een korte formatieve toets om na te gaan of het geleerde is blijven hangen.

Materialen

Je kunt per leerjaar twintig korte lessenseries vinden vanaf grade 6 (brugklas) tot grade 8 (3e klas havo en vwo). In de materialen voor de brugklas en tweede klas zitten materialen die ook geschikt zijn voor vmbo basis, kader en voor mavo. Voor klas 4 t/m 6 zijn veertig lessenseries in totaal beschikbaar onder het kopje highschool. In plaats van op leerjaar, kun je ook zoeken op type les: problemen oplossen (dit zijn een soort wiskundige denkactiviteiten) of het ontwikkelen van inzicht (waar het materiaal in dit artikel een voorbeeld van is).

Pluspunten

- Veel werkvormen zijn zonder aanpassing bruikbaar omdat de wiskundige notatie in Nederland en de VS veelal gelijk is.
- Beginnende docenten kunnen sneller effectieve lessen geven doordat de misvattingen van leerlingen expliciet benoemd worden.
- De werkvormen zijn goed doordacht, gebaseerd op wetenschappelijke inzichten en uitgetest op scholen in de VS en het VK waardoor grote kinderziekten er meestal uit zullen zijn.
- De website is op allerlei manieren doorzoekbaar: leerjaar, niveau (beginnend, gevorderd), type oefeningen, enzovoorts.
- Naast actieve werkvormen en formatieve toetsen vind je ook summatieve toetsen (voor een cijfer dus) per onderwerp en ook voor een aantal onderwerpen bij elkaar
- Er zijn online nascholingen beschikbaar, bijvoorbeeld over formatief toetsen.
- Het is eenvoudig om op de ideeën van de oefeningen te variëren.

Minpunt

Grote getallen en decimale getallen worden anders geschreven (komma en punt omgewisseld) evenals negatieve getallen (worden tussen haken gezet; net als vroeger in Nederland!). Voor negatieve getallen heb ik geaarzeld of ik dit niet juist bij de voordelen moet opnemen. Laten we het een aandachtspunt noemen.

Geschikt voor: havo en vwo, een enkele zelfs voor eerste jaar hbo en universiteit (highschool). Een aantal onderdelen is ook geschikt voor vmbo basis, kader en mavo (grade 6 en misschien 7). Voor alle docenten is het een inspiratiebron voor materiaal dat zelf wordt ontwikkeld.

Eindoordeel: 'aanschaffen'
Kosten: gratis
Getest op: laptop met Chrome versie
Maker: Math Assessment Project.
Te vinden via: *http://map.mathshell.org*
De beschreven les: *http://map.mathshell.org/lessons.php?unit=8110&collection=8*

De materialen op de beschreven website van het Math Assessment Project zijn gemaakt in een samenwerking tussen de Universiteit van California in Berkeley (VS) en het Shell Centrum aan de Universiteit van Nottingham (VK). Hierbij is samengewerkt met het Silicon Valley wiskunde initiatief en scholen in de VS en het VK.
De website wordt mede gefinancierd door de Bill en Melinda Gates Stichting. *http://k12education.gatesfoundation.org/blog/math-design-collaborative/*


vakbladeuclides.nl/944boels_digitaal

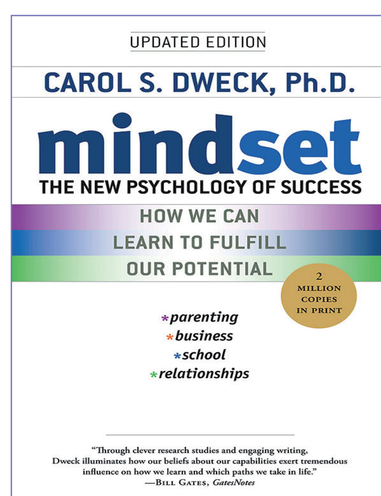
Over de auteur

Lonneke Boels is wiskundedocent op het Christelijk Lyceum Delft, promovendus met een lerarenbeurs aan de Universiteit Utrecht en directeur van Alaka, professionals in wiskunde en rekenen.
E-mailadres: *L.Boels@chrlyceumdelft.nl*

MINDSETS EN WISKUNDE

Marloes van Hoeve

'Ik snap er helemaal niets van' of 'Wat een domme fout'. Kleine zinnetjes die leerlingen hardop zeggen, en die voor docenten een belangrijk signaal zijn. Ze laten zien dat de leerling op dat moment vanuit een *fixed mindset* aan het werk is. In dit artikel legt Marloes van Hoeve uit wat een *mindset* is, hoe die *fixed* of *growth* kan zijn en hoe docenten in hun lessen de *mindset* van leerlingen kunnen beïnvloeden.



figuur 1 '*Mindset, the new psychology of success*' door Carol Dweck

Theorie van de mindset

De begrippen *fixed* en *growth mindset* zijn geïntroduceerd door Carol Dweck[1],en worden uitgebreid besproken in haar boek *Mindset*, zie figuur 1. Zij onderscheidt, na twintig jaar onderzoek, twee soorten *mindsets*:

– *fixed*: je hebt talenten voor bepaalde vakken en voor andere niet;
– *growth*: wat je is toebedeeld is het beginpunt van waaruit je je kunt ontwikkelen.

Fixed Mindset (intelligence is static)	Growth Mindset (intelligence can be developed)
leads to a desire to look smart and therfore a tendency to – * avoid challenges * gets defensive or give up easily * sees effort as fruitless or worse * ignores useful negative feedback * feels threatened by the success of others.	leads to a desire to learn and therefore a tendency to – * embrace challenges * persists in the face of setbacks * sees effort as the path to mastery * learns from criticism * finds lessons and inspiration in the success of others.
As a result, they may plateau early and achieve less than their full potential.	As a result, they reach even higher levels of achievement.

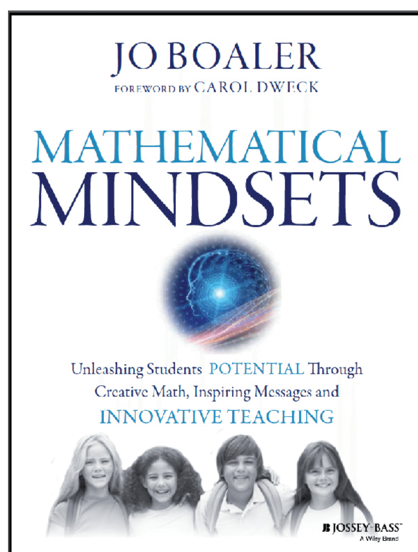
figuur 2 De kenmerken van *fixed* en *growth mindset* door Dweck

De gevolgen van deze verschillende *mindsets* zijn groot op hoe leerlingen in het leven staan, en dan met name in hoe ze omgaan met uitdagingen en obstakels (zie ook figuur 2). Als ze vanuit een *fixed mindset* denken, dan gaan ze een uitdaging liever niet aan. Stel namelijk dat het mislukt, dan denken ze dat ze niet slim zijn, en aangezien ze denken dat ze niet kunnen veranderen zullen ze dan altijd 'niet slim' blijven. Als ze daarentegen vanuit een *growth mindset* denken, dan gaan ze een uitdaging juist wel aan. De uitkomst maakt namelijk niet echt uit, ze weten en voelen dat het erom gaat dat ze het proberen, dat ze leren van hun fouten, dat hun hersenen aan het werk zijn en dat ze groeien. Als ze vanuit een *growth mindset* denken dan is een fout juist het begin van verandering.

Het ontstaan van een bepaalde *mindset* wordt onder andere beïnvloed door de opvoeding en school. Ouders die zeggen 'ik kon dit vroeger ook nooit' dragen onbedoeld bij aan een *fixed mindset*. Het schoolsysteem speelt een belangrijke rol met veel nadruk op cijfers en scores, waarbij fouten maken niet als positief wordt gezien.
De resultaten van de citotoetsen, die eigenlijk een momentopname zijn, worden jarenlang gebruikt om iemands bekwaamheid te typeren, wat ook weer een *fixed mindset* in de hand werkt.
Zeker bij wiskunde speelt *mindset* een belangrijke rol. Het is een vak dat gepaard kan gaan met frustratie als leerlingen niet gelijk 'de' oplossing zien. Hoge cijfers en het snel vragen kunnen beantwoorden wordt vaak als een bewijs voor slimheid gezien. En het is een vak dat ook in onze samenleving geassocieerd wordt met iets waar je goed in bent of juist niet.

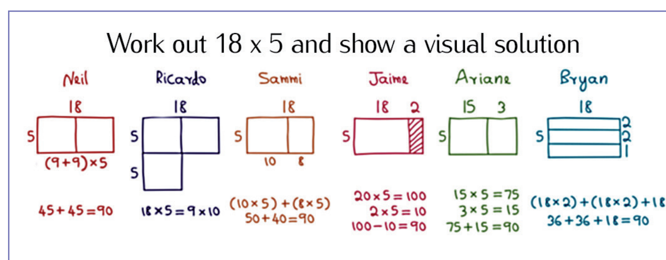
Interventies die een growth mindset stimuleren

Uit het onderzoek van Dweck, en later ook vele anderen, blijkt dat je *mindset* niet *fixed* is, oftewel dat je de *mindset* kunt veranderen en dat iedereen meer vanuit een *growth mindset* kan kijken.



figuur 3 *Mathematical Mindsets* van Jo Boaler

Om leerlingen bij de wiskundelessen uit te nodigen om meer vanuit een *growth mindset* te gaan werken heeft Jo Boaler[2] in haar boek over *Mathematical Mindsets*, zie figuur 3, verschillende interventies uitgewerkt. Een voorbeeld van een opgave uit het boek is te zien in figuur 4. Laat een berekening en een tekening zien van een vermenigvuldiging. Hierbij zien en ervaren leerlingen op hoeveel manieren je 18 x 5 kunt berekenen.



figuur 4 *Mathematical Mindsets*: een voorbeeldopgave met leerlingantwoorden

Een aantal van de interventies uit het werk van Boaler en ander recent onderzoek zijn in het schooljaar 2016-2017 getest op het Goois Lyceum. Door middel van interviews met docenten en leerlingen kwam hieruit naar voren dat er drie interventies zijn die laagdrempelig zijn, makkelijk overdraagbaar en die door leerlingen als zeer waardevol worden ervaren.
Tijdens het schooljaar 2017-2018 zijn deze interventies verder uitgewerkt en uitgevoerd in één vwo en vier havo klassen op tien scholen verspreid over Nederland. Deze interventies bestonden uit 1) uitleg over *mindset* en de werking van de hersenen; 2) het belang van fouten maken en 3) het gebruik van *growth* feedback.

Interventie 1: De theorie van *mindset* en de werking van de hersenen
Uit recent onderzoek van onder anderen Helden en Bekkering[3] blijkt hoe hersenen een leven lang kunnen groeien. In de hersenen bevinden zich vele zenuwcellen die een groot aantal lichaamsfuncties regelen en die ook verantwoordelijk zijn voor het denkvermogen. Deze zenuwcellen, of neuronen, kunnen steeds weer nieuwe verbindingen maken. Hierdoor kan een rijk verspreid netwerk ontstaan met veel mogelijkheden om steeds weer nieuwe dingen te leren; neuroplasticiteit. Een veelgehoorde vraag is: is ieder brein bij geboorte hetzelfde? Nee dat niet, de beginsituatie is anders. En iedereen heeft de mogelijkheid om wiskunde te leren; het hangt wel af van verschillende factoren hoe ver iemand ermee komt.
In de lessen begon deze interventie met een presentatie over de werking van de hersenen en over de theorie van *mindsets*. De bijbehorende opdracht was het maken van een lastige opgave zonder de uitleg van nieuwe wiskundetheorie. Hierbij wordt snel duidelijk of een leerling vanuit een *fixed mindset* aan het werk gaat (vermijdend gedrag, niet durven proberen, bang om fouten te maken) of vanuit een *growth mindset* (ik ga het proberen, als het niet lukt vraag ik het of probeer het gewoon nog een keer). De rol van de docent is de leerling uit te nodigen om vanuit de *growth mindset* te werken, en om regelmatig even terug te komen op de neuroplasticiteit van de hersenen.

Interventie 2: Het belang van het maken van fouten
Onderzoek van onder anderen Boaler[2] toont aan dat hersenen van personen die fouten maken met een *growth mindset* veel meer activiteit vertonen, dan de hersenen van iemand die fouten maakt met een *fixed mindset*. Als leerlingen een som niet snappen, of een onvoldoende halen, en ze kijken vanuit een *fixed mindset*, dan hebben ze het gevoel dat ze falen: 'Oh nu ben ik door de mand gevallen'. Ze krijgen stress en stresshormonen zorgen ervoor dat er minder nieuwe verbindingen tussen de neuronen ontstaan. Als een leerling werkt vanuit een *growth mindset,* dan worden obstakels als uitdagingen gezien; hij of zij gaat zelf of samen met de docent onderzoeken wat nog niet helemaal duidelijk is. Docenten die vanuit een *growth mindset* met fouten van leerlingen omgaan zeggen bijvoorbeeld 'ik wil je manier van denken begrijpen en samen ontdekken wat de volgende stap is'. Dit vertrouwen geeft gelukshormonen en het stimuleert het maken van nieuwe verbindingen tussen neuronen.
In de les begon deze interventie met een presentatie over de functie van fouten maken en hoe belangrijk je *mindset* daarbij is. Vervolgens is er een aantal lessen gewerkt met 'mijn favoriete fout'.[4] Aan het begin van de les worden kaartjes uitgedeeld met een opdracht, bijvoorbeeld voor 4 havo de vraag om $(6x - 6) - 6(x - 1)$ te herleiden. De leerlingen maken deze opdracht in stilte, de docent kijkt ze snel na en haalt de meest voorkomende, de favoriete, fout eruit. De docent schrijft de hele som inclusief (foute) uitwerking op het bord, eerst moeten de leerlingen aangeven wat er allemaal goed is gegaan en daarna komt de fout aan bod. Die kan zo uitgebreid besproken worden.

Interventie 3: De goede feedback
Het is belangrijk dat docenten zich bewust zijn van de feedback die zij geven, zeker tijdens het maken van fouten. Als zij zeggen 'wat een domme fout' dan werkt dat stigmatiserend en dus een *fixed mindset* in de hand. De uitdaging is om als docent geen feedback te geven op eigenschappen maar op het proces. En het gaat niet alleen om de woorden maar ook om de lichaamshouding en de blik in de ogen.
Het is niet alleen de feedback die leerlingen krijgen van anderen, het is ook de feedback die ze zichzelf geven. In een klas is het handig om goed te luisteren naar wat leerlingen zeggen tijdens het maken van de opgaven of als ze aan het praten zijn. In figuur 5 zie je de zinnen die horen bij een *fixed* of *growth mindset*.
De houding van de leerkracht is belangrijk; als een leerkracht ervan uitgaat dat de prestaties van de leerlingen het hele jaar hetzelfde blijven (*fixed*), dan geeft dat een soort stagnatie. Terwijl als een leerkracht ervan uitgaat dat de prestaties van de leerlingen kunnen groeien, dan ontwikkelen de leerlingen zich veel beter. '*Goede leraren geloven in ontwikkeling van intelligentie en talent en zijn gefascineerd door het leerproces*'[1]

Fixed mindset zinnen	*Growth mindset zinnen*
Wat ben ik dom	Wat heb ik gemist?
Ik ben hier heel slecht in	Het lijkt er op of ik op het goede spoor zit
Ik kan gewoon geen wiskunde	Ik ga mijn hersenen trainen om wiskunde te doen
Dit kan ik echt niet	Dit gaat wel even duren
Zij is hier veel beter in	Ik ga proberen hoe zij dat doet
Het is precies goed zoals het is, en het jouwe is niet beter	Dat is een interessant idee voor een verbetering

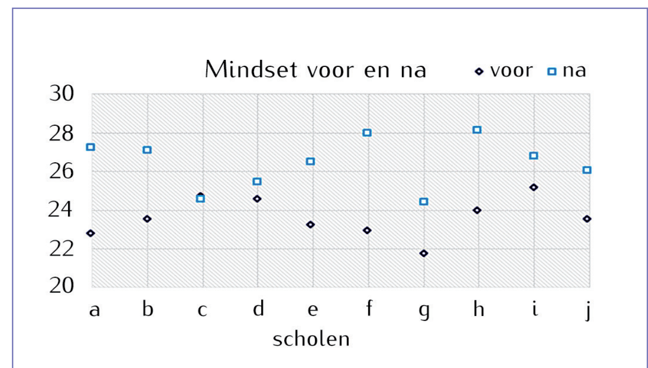
figuur 5 Uitspraken van leerlingen bij een *fixed* en een *growth mindset*

Bij de interventie over feedback hebben de leerlingen eerst weer een korte presentatie gekregen over feedback. De opdrachten die daarna zijn gegeven waren '*low floor heigh ceiling*' opgaven, bijvoorbeeld 'wat is de grootste oppervlakte die je kunt maken met 36 palen van 1 meter?' Hierbij konden leerlingen makkelijk beginnen en zichzelf steeds ingewikkelder vragen stellen en op zoek gaan naar oplossingen. De feedback die de docent hierbij gaf was steeds gericht op het proces en werkt zo een *growth mindset* in de hand.

De rol van de docenten bij de interventie

De lessen op de verschillende scholen werden door verschillende docenten gegeven, die hiervoor eerst een studiedag hebben gevolgd over *mindset* en de interventies. Zodra docenten bekend zijn met de theorie van de *mindset* veranderen de lessen al.
Onderliggend aan de overtuigingen van de leerlingen liggen de overtuigingen van de docent. Denkt hij of zij: 'deze klas krijg ik niet meer in beweging dit schooljaar, ik zit mijn tijd wel uit' of 'leerlingen hebben te allen tijde het potentieel om hun intelligentie te verbeteren'.
En hoe staat de docent zelf tegenover het maken van fouten? Docenten werden uitgenodigd om te oefenen met het hardop voor de klas benoemen wat er met je gebeurt als je voor het bord staat en je maakt een fout; hoe ben je erachter gekomen? Wat doe je om de fout te herstellen? Wat leer je ervan? Leerlingen moeten soms even wennen aan het feit dat een docent een fout maakt en deze ook benoemt, maar als ze vervolgens zien hoe de docent hiermee verder werkt leren ze zelf ook hoe ze met fouten om moeten gaan.

Resultaten



figuur 6 Gemiddelde *mindset*-scores van de klassen voor en na de interventies

Voor aanvang en na afloop van de interventies hebben de leerlingen enquêtes ingevuld op basis waarvan de *mindset* bepaald kon worden. In figuur 6 is te zien dat bij negen van de tien scholen de gemiddelde *mindset* na de interventie meer naar een *growth mindset* is gegaan. Bij de na-enquête hebben de leerlingen ook een score gegeven over wat ze van de interventies vonden. Ze gaven veel aan de interventies als waardevol te hebben ervaren. Vanwege de interventies zelf, en ook vanwege de veranderingen in de houding van de docent. Uit de interviews kwam naar voren dat de leerlingen de aandacht voor het maken van fouten veelal als positief hebben ervaren, al konden ze soms nog eerlijk antwoorden; 'ik heb wel geleerd dat fouten maken niet erg is, maar ik blijf het toch niet leuk vinden'. De aandacht voor specifiek woordgebruik vonden ze bijzonder; 'Het lijkt soms wel een nieuwe taal die we samen leren'.
Het komende schooljaar zullen de resultaten van de enquêtes en interviews nog verder worden uitgewerkt. Deze zullen in een tweede artikel over *mindset* gepubliceerd worden.

Discussie

Het mooist zou het zijn om als schoolteam te denken aan een grootschalige implementatie van hoe leren werkt, hoe belangrijk fouten maken is en hoe waardevol goede feedback is. Dit past ook los van de theorie van *mindset* bij de basiswaarden in het onderwijs. En met deze relatief

nieuwe theorie van Dweck worden die in een nieuw jasje gestoken en opnieuw bevestigd. Het is een uitnodiging om te groeien naar een cultuur waarin de pedagogische benadering steeds weer gekoppeld wordt aan relevante nieuwe psychologische inzichten.
Belangrijk onderdeel bij de interventies is de taal die er wordt gebruikt; in het klaslokaal, in de gangen, in de docentenkamer en bij de schoolleiding. Woordgebruik zou te allen tijde zorgvuldig moeten zijn. In de feedback, bij het maken van fouten, bij het bouwen aan goede relaties (dit noemt Hattie[5] ook in zijn onderzoek) en in communicatie met de ouders.
In deze maatschappij waar leerlingen zoveel informatie kunnen vinden op internet zou het hele idee van wat we moeten doorgeven aan onze leerlingen moeten veranderen. In plaats van de nadruk op reproductie te leggen is het de uitdaging om leerlingen zoveel mogelijk inzicht te geven in hoe ze kunnen leren en hoe ze zoveel mogelijk uit zichzelf kunnen halen. Met de nadruk op een gezonde competitie, vertrouwen in zichzelf, tijd om na te denken, verbinding te maken met de mensen om zich heen, en met de volle overtuiging dat ze van fouten kunnen leren en dat de tijd er is om er veel te maken. En met deze uitdaging kan de docent vandaag al beginnen.

Dit artikel is een tussentijdse rapportage van een onderzoek in het kader van het Postdoc-vo programma onder begeleiding van Michiel Doorman (Freudenthal Instituut). Zie ook *www.postdoc-vo.nl*. Met veel dank aan alle docenten die mee hebben gedaan aan het onderzoek.

 *vakbladeuclides.nl/944vanhoeve*

Noten

[1] Dweck, C.S. (2006). *Mindset, The new psychology of success.* New York: Random House USA Inc.
[2] Boaler, J. (2016). *Mathematical mindset.* Hoboken: Jossey Bass.
[3] Helden, J. van der & Bekkering, H. (2015). *De lerende mens; over dat we ons leven lang kunnen leren!* Amsterdam: Boom.
[4] Alcala, L. My favourite no: *https://www.youtube.com/watch?v=srJWx7P6uLE*
[5] Hattie, J. (2018). Collective Teacher Efficacy (CTE) according to John Hattie. Te downloaden van: *https://visible-learning.org/2018/03/collective-teacher-efficacy-hattie/*

Over de auteur

Marloes van Hoeve geeft wiskunde op het Goois Lyceum te Bussum. Zij is in 2000 gepromoveerd op geologisch onderzoek naar cyclische veranderingen in de Laat Neogene vegetatie uit lacustriene afzettingen in Griekenland. Sinds 2015 onderzoekt zij twee dagen per week, aan de Universiteit Utrecht, de rol van mindset in de wiskundelessen.

UIT DE PRAKTIJK

Liesbeth Coffeng

Mijn mbo-studenten (laboratoriumtechniek) moeten veel deadlines halen en dat gaat niet altijd goed. Als docent word je daar wel eens humeurig van, maar dan helpt een origineel excuus. Van Jop uit klas 4 biomedisch ontving ik een naamdicht ‘sorry’. Met mijn humeur kwam het helemaal goed en natuurlijk streek ik met mijn hand over het hart!

Sorry voor onze late e-mail, het was niet de bedoeling om onze onderzoeksopzet zo laat in te leveren.
Oorverdovend zijn onze pleidooien voor vergiffenis en ijzersterk onze resolutie om het goed te maken.
Rare mensen zouden wij zijn als wij deze misstap niet zouden proberen te corrigeren!
Roerloos zouden onze moralen moeten zijn, vrij om te wisselen van koers in de drukte van ons schoolwerk.
Yin & yang zullen bij deze gebalanceerd worden, een late motivatie in ruil voor een mooi verslag!

Jop van Beek

ONCONVENTIONEEL DIFFERENTIËREN

Rogier Bos

Differentiëren, maar dan anders. Rogier Bos verkent alternatieve routes om de differentiaalrekening te introduceren.

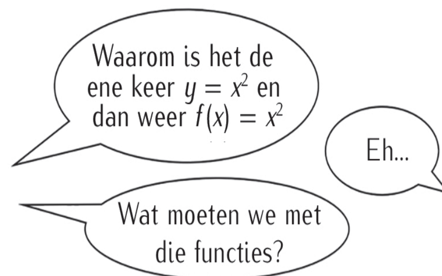
Inleiding

'Waarom doen we bij het berekenen van de helling eigenlijk $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ en niet $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, 'Waarom schrijven we de ene keer $f(x) = \ldots$ en $f'(x) = \ldots$ en de andere keer $y = \ldots$ en $\frac{dy}{dx}$?' en 'Waarom is $y = \sqrt[3]{x}$ niet differentieerbaar in 0; er zit toch geen knik?'.
Stellen jouw leerlingen deze vragen ook wel eens als je differentiëren behandelt in de klas? Heb je dan een goed antwoord klaar? Het antwoord op elk van deze vragen is dat het iets met conventies te maken heeft; conventies die het begrip van *differentiëren* niet altijd vergemakkelijken. Er is een internationale traditie om differentiëren via functies en het differentiaalquotiënt te leren. In dit artikel ontrafelen we en bekritiseren we die traditie; niet met het doel dat het helemaal anders moet, maar wel omdat leerlingen een goed antwoord op bovenstaande vragen verdienen. Bovendien raakt door de traditionele benadering de essentie en het wonder van differentiëren weleens uit het zicht: dat 'de meeste' grafieken lokaal lineair zijn!

Functies

Waarom hechten we zo'n belang aan functies in het secundair onderwijs? Dat de afhankelijkheid van een variabele tot een andere zo is dat deze als functie ervan geschreven kan worden is de uitzondering, niet de regel, globaal bekeken (lokaal heb je natuurlijk de *impliciete functiestelling*).
En als het wel eens lukt: wat voegt het toe om dit te benoemen en de functienotatie te introduceren? Deze uitspraak is niet alleen een provocatie, maar een dagelijks gevoelde realiteit: sommige leerlingen blijven tot het eindexamen aan toe stug schrijven $y = x^2$ in plaats van $f(x) = x^2$.
Verwarring alom met notaties $\frac{dy}{dx}$, $f'(x)$, en zelfs y' door elkaar.

Het enige wat de introductie van een functie f om de relatie $y = f(x)$ tussen x en y te beschrijven wil zeggen is



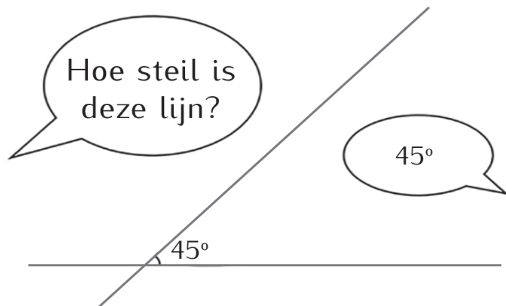
dat bij iedere x precies één y hoort. Is dat van belang om te differentiëren? Absoluut niet. Wordt het leren van differentiëren makkelijker om het in de context van functies te doen? Wellicht niet.
Veel relaties tussen variabelen, in het bijzonder grootheden in de natuurkunde, worden ook niet op basis van functies geïntroduceerd. Dan heb ik het over de eenheidscirkel $x^2 + y^2 = 1$, de ideale gaswet $pV = RTn$ of de lenzenformule $\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$.

Het vrijmaken van een variabele maakt in deze voorbeelden de algebra niet eenvoudiger. Veel figuren laten zich beter door iets anders dan een functie beschrijven, bijvoorbeeld als nulpuntsverzameling of als geparametriseerde kromme. Zodra je een beetje serieuze dynamica gaat doen (kogel- of planeetbaan) gebruik je die laatste en geen functies.
De functiefixatie leidt er ook toe dat leerlingen bij parabolen direct aan $y = x^2$ denken. En waarom doen wij, docenten, ze dat aan? Waarom houden we de algebraïsche veelzijdigheid van de parabool, bijvoorbeeld $x = y^2$ of $x + y = (x - y)^2$, zo angstvallig verborgen?

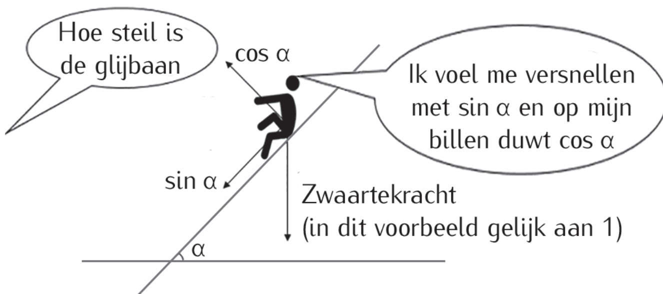
Om te differentiëren en over helling te praten hebben we functies zeker niet nodig. Hieronder bekijken we de mogelijkheid om *impliciet* te differentiëren: zonder functies. Maar *impliciet differentiëren* definieer je normaal met behulp van een differentiaalquotient (net als normaal differentiëren). Ook dat is een conventie, waarvoor alternatieven zijn.

Quotiënt

Wanneer je leerlingen vraagt de steilheid van een lijn te kwantificeren is $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ waarschijnlijk niet het eerste wat in ze opkomt. Natuurlijk noemen ze de hoek van die lijn met de 'grond'... Oké, dan zitten ze er maar een tangens vanaf.



Maar waarom zou je niet kijken naar de sinus, cosinus of cotangens van die hoek? De steilheid van bijvoorbeeld een glijbaan *ervaar* je (als je erop zit) als de normaalkracht die op je billen duwt en de zwaartekrachtscomponent evenwijdig aan het vlak die zorgt dat je naar beneden raast. Hoe steiler de glijbaan des te kleiner de normaalkracht en groter de evenwijdige component. Laten deze twee nu juist evenredig zijn met de cosinus en sinus van de hoek. Deze goniometrische functies passen dus beter bij de ervaring van steilheid.



De aandacht voor het quotiënt $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (en daarmee tan α) is natuurlijk verbonden met de *algebraïsche* beschrijving van de lijn als $y = ax + b$, met $a = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, de richtingscoëfficiënt.
Dit komt in het curriculum aan bod voor *differentiëren*. Impliciet wordt dan de afslag richting het quotiënt en functies al genomen met y vrijgemaakt aan de linkerkant. De uitdrukking $x = ay + b$, met $a = \frac{\Delta x}{\Delta y}$ = cotan α, krijgt meestal geen aandacht, laat staan mijn favoriet, $(y - y_0)\Delta x = (x - x_0)\Delta y$. Die laatste kan ook mooi geschreven worden als $(y - y_0)\cos\alpha = (x - x_0)\sin\alpha$.
Leerlingen zijn vaak verward over of het nu $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ of $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ moet zijn en dat is jammer. In de praktijk zie je namelijk vaak beide uitdrukkingen en kun je niet echt aangeven of één van de twee beter is. Mijn auto geeft mijn snelheid in kilometer per uur, maar mijn hardloop-app vertelt me mijn tijd per kilometer. Over auto's gesproken: toen ik voor het eerst leerde over benzineverbruik werd dat uitgedrukt in kilometers per liter. Maar mijn huidige Polo geeft het verbruik in liters per 100 km. Voor hardlopers is het ook vaak interessant om te weten dat ze bijvoorbeeld 5 km in 20 minuten lopen. Daarbij hoort dan een vergelijking $20s = 5t$ (met s de afstand in km en t de tijd in minuten). Het beschrijven en nemen van ratio's is lang niet altijd zo verhelderend en noodzakelijk. Het inzicht in de *evenredigheid* is het centrale punt.

Een andere insteek bij differentiëren

Geen functies en geen quotiënt, wat blijft er dan nog over van differentiëren, impliciet of niet?
Welnu, je kunt als volgt te werk gaan. Je begint met een of andere vergelijking, waarin je twee variabelen kiest, zeg x en y. We onderzoeken hoe een kleine variatie Δx in de ene variabele x samenhangt met een variatie Δy in een andere variabele y, terwijl we de overige variabelen constant houden. We bekijken niet het quotiënt

($\frac{\Delta y}{\Delta x}$ of $\frac{\Delta x}{\Delta y}$), maar onderzoeken of er *bij benadering* sprake is van een evenredig verband tussen Δx en Δy.
Er is sprake van differentieerbaarheid dan en slechts dan als dat verband er is, en dan is de bijbehorende grafiek *lokaal lineair*.

Voorbeeld 1 Gaswet
Om te illustreren hoe deze aanpak werkt, zie hier een voorbeeld met de ideale gaswet $pV = RTn$. Stel: de temperatuur en het aantal deeltjes is constant en wel zo dat $RTn = 1$. Dan staat er $pV = 1$. We willen weten wat, bij vaste p en V, het verband is tussen Δp en ΔV als deze beide klein zijn. Invullen maar: $(p + \Delta p)(V + \Delta V) = 1$. Oftewel $pV + p\Delta V + V\Delta p + \Delta p\Delta V = 1$. Natuurlijk is $\Delta p\Delta V$ heel klein, dus die gaan we verwaarlozen; bovendien kunnen we gebruiken $pV = 1$. Dus we vinden $p\Delta V + V\Delta p \approx 0$, oftewel $p\Delta V \approx - V\Delta p$. Dus Δp en ΔV zijn bij benadering evenredig! In feite hebben we nu de afgeleide $\frac{dV}{dp}$ van $V = \frac{1}{p}$ gevonden.
Herschrijf maar:

$$\frac{\Delta V}{\Delta p} \approx -\frac{V}{p} = -\frac{1}{p^2}$$

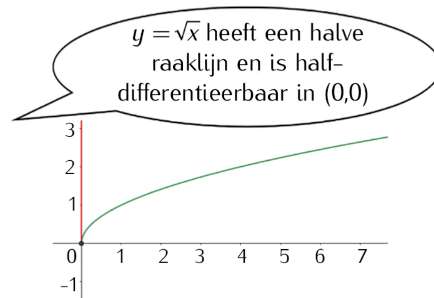
Merk op dat omgekeerd ook $\frac{\Delta p}{\Delta V} \approx -\frac{p}{V} = -\frac{1}{V^2}$.

Het is rekenkundig wel heel prettig dat bij deze afleiding algebraïsch rekenen met breuken niet nodig is (zoals normaal gesproken als je $f(x) = 1/x$ met het differentiaalquotiënt te lijf gaat). Dat lijkt me didactisch een pluspunt. Waarom zou je iets conceptueel moeilijks proberen uit te leggen met iets wat technisch rekenkundig moeilijk is?

Voorbeeld 2 $y = \sqrt{x}$
Een ander voorbeeld is $y = \sqrt{x}$. Dan gaat het als volgt: $y + \Delta y = \sqrt{x+\Delta x}$. Kwadrateren en uitwerken levert $y^2 + 2y\Delta y + \Delta y^2 = x + \Delta x$. Dus $y^2 + 2y\Delta y \approx x + \Delta x$. Gebruiken we $y^2 = x$, dan vinden we opnieuw dat Δx en Δy evenredig zijn: $2y\Delta y \approx \Delta x$. Hieruit kun je desgewenst afleiden: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (of $\frac{dx}{dy} = 2y$, de bekende afgeleide van $x = y^2$.) Opnieuw hebben we geen lastige algebra met wortels en breuken, maar een echt eenvoudige berekening. We hebben nu geen ≈ meer gebruikt en zijn overgegaan op formele afgeleide notatie. Merk op dat, net als in de gangbare benadering op school, de limietprocedure hier informeel wordt toegepast.

Raaklijn en differentieerbaarheid

Voor het opstellen van een vergelijking van de raaklijn heb je het quotiënt overigens niet nodig; dat kan met behulp van mijn favoriete vergelijking voor een lijn, $(y - y_0)\Delta x = (x - x_0)\Delta y$. Stel je wilt de raaklijn aan $y = \sqrt{x}$ in (4, 2).
Invullen van $2y\Delta y = \Delta x$ geeft $(y - y_0)2y\Delta y = (x - x_0)\Delta y$. Het punt (4, 2) invullen en Δy uitdelen geeft $4(y - 2) = x - 4$. Voilà! Vul het punt (0, 0) in en je vindt voor de raaklijn $x\Delta y = 0$, ofwel $x = 0$. Bovendien volgt uit $0 + \Delta y = \sqrt{0+\Delta x}$ dat $\Delta y \geq 0$; ofwel er is eigenlijk een halve raaklijn. In dit geval bestaat $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ niet, maar het zou niet misstaan te zeggen dat $y = \sqrt{x}$ rechts-differentieerbaar is in (0, 0).



Samengevat wil ik hier onder de aandacht brengen dat je differentieerbaarheid kunt zien als evenredigheid (bij benadering) van de variaties van de betrokken variabelen. Functies zijn hierbij niet nodig en het nemen van het quotiënt kan gezien worden als een *after thought*. Dat bij deze aanpak het uit de definitie berekenen van een afgeleide eenvoudiger wordt is een enorme didactische bonus.

Over de auteur

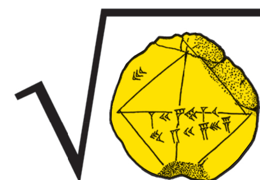
Rogier Bos is universitair docent wiskundeonderwijs aan het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht.
E-mailadres: *r.d.bos@uu.nl*

WORTELS VAN DE WISKUNDE

Peter Lanser

12: OP WEG NAAR $\sqrt{-1}$ ALS GETAL

In de rubriek Wortels van de Wiskunde bespreken Desiree van den Bogaart en Jeanine Daems, geïnspireerd door het door hen vertaalde gelijknamige boek, de mogelijkheden om primaire bronnen te gebruiken in de klas. Voor deze aflevering is Peter Lanser gastschrijver. Zijn bijdrage gaat over de acceptatie van $\sqrt{-1}$.



Inleiding

In de derde klas havo/vwo wordt bij het onderdeel oplossen van kwadratische vergelijkingen, als blijkt dat de product-som-methode of het ontbinden van factoren niet altijd lukt, het kwadraat afsplitsen geïntroduceerd.
De *abc*-formule, die ook wel de wortelformule wordt genoemd – in vroegere tijden werden oplossingen van vergelijkingen wortels genoemd – is een veralgemenisering van het kwadraat afsplitsen. In de *abc*-formule is een essentiële rol weggelegd voor de discriminant, oftewel hetgeen discrimineert (Latijn: *discriminare*, onderscheiden). Aan de hand van de waarde van de discriminant kunnen leerlingen bepalen hoeveel oplossingen, hoeveel snijpunten met een gegeven horizontale lijn, een kwadratische formule heeft. *Moderne Wiskunde 3A vwo* (2014, p. 108) concludeert bij de discriminant: ‘Je kunt niet de wortel van een negatief getal trekken. Daarom vind je alleen oplossingen als $D \geq 0$.’
Het is begrijpelijk, maar tegelijkertijd jammer dat de kous hiermee af lijkt te zijn. Zou het oplichten van een tipje van de sluier dat er in een bepaalde tak van de wiskunde een $D < 0$ wel degelijk tot oplossingen leidt, (sommige) leerlingen niet nieuwsgierig kunnen maken? En zou je de conceptuele worsteling met de wortel uit een negatief getal kunnen belichten aan de hand van primaire bronnen?

> ‘KUN JE DE CONCEPTUELE WORSTELING MET DE WORTEL UIT EEN NEGATIEF GETAL BELICHTEN AAN DE HAND VAN PRIMAIRE BRONNEN?’

Derdegraads vergelijkingen

In de 15e en 16e eeuw was het oplossen van specifieke derde- en vierdegraads vergelijkingen in Italië een kunst op zich, waar flinke sommen geld maar zelfs ook dertig (!) banketten mee verdiend konden worden.[1]
Scipione del Ferro (1456 - 1526) zocht en vond een algemene oplossingsmethode voor derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3 + px = q$.
Niccolò Fontana (1499 - 1557) is de ontdekker van een oplossingsmethode voor derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3 = px + q$. Over Fontana, die een groot deel van zijn leven Tartaglia, stotteraar, werd genoemd, is een mooie roman geschreven.[2]
In 1545 publiceerde Girolamo Cardano in zijn beroemde *Artis Magnæ, Sive de Regulis Algebraicis Liber Unus*, beter bekend als *Ars Magna*, zonder enige verwijzing de oplossingsmethode van Tartaglia, die Cardano onder belofte van geheimhouding van hem had gekregen:

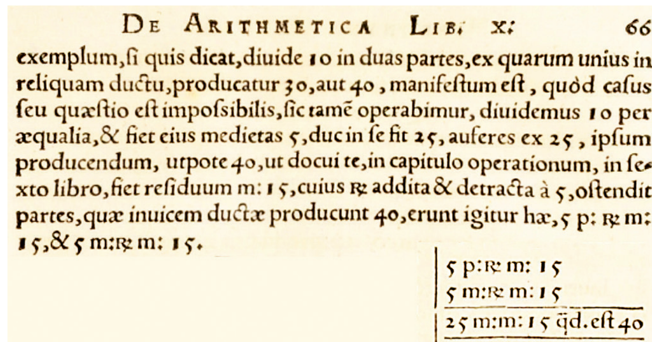
$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Over deze fascinerende Italiaanse intrige kun je meer lezen in schets 11 van *Wortels van de wiskunde*. Op bovenstaande oplossingsmethode kom ik later terug.
Naast algemene algebraïsche oplossingen voor kubische/derdegraads en vierdegraads vergelijkingen bevat het boek vraagstukken over kwadratische vergelijkingen, opgaven die leerlingen in 3 havo/vwo goed kunnen begrijpen.

Een van de vraagstukken in *Ars Magna* is: ‘Vind twee getallen waarvan de som 10 is en het product 40.”
Je kunt leerlingen bijvoorbeeld een tabel laten maken van positieve getallen die opgeteld 10 opleveren. De conclusie zal uiteindelijk zijn dat het product nooit meer dan 25 kan zijn. Met het merkwaardig product $p(x) = (5 + x)(5 - x)$ met $0 < x < 5$ kunnen leerlingen dit ook daadwerkelijk aantonen. De grafiek van $p(x)$ maakt het mooi inzichtelijk.

Cardano schrijft over dit vraagstuk in *Ars Magna* zelf het volgende:

Als gezegd wordt, deel 10 in twee delen, waarvan het product 40 is, dan is het duidelijk dat dit onmogelijk is. Desondanks doen we het als volgt: we delen 10 in twee gelijke delen, wat elk 5 maakt. Dit kwadrateren we, en dat wordt 25. Trek daar 40 van af en dat geeft een rest van -15, waarvan de vierkantswortel opgeteld of afgetrokken bij 5 de delen geeft waarvan 40 het product is. Dat zijn 5 + wortel*(-15) en 5 –* wortel*(-15). De mentale marteling die dit geeft opzij gezet hebbende, het vermenigvuldigen van 5 +* wortel*(-15) en 5 –* wortel*(-15) geeft 25 – (-15). Zie hier het product 40. Dit is werkelijk een intellectueel spelletje dat betekenisloos is. (eigen bewerking uit het Engels)*[3]


DE ARITHMETICA LIB. X. 66

exemplum, ſi quis dicat, diuide 10 in duas partes, ex quarum unius in reliquam ductu, producatur 30, aut 40, manifeſtum eſt, quòd caſus ſeu quæſtio eſt impoſsibilis, ſic tamē operabimur, diuidemus 10 per æqualia, & fiet eius medietas 5, duc in ſe fit 25, auferes ex 25, ipſum producendum, utpote 40, ut docui te, in capitulo operationum, in ſexto libro, fiet reſiduum m: 15, cuius ℞ addita & detracta à 5, oſtendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40, erunt igitur hæ, 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15.

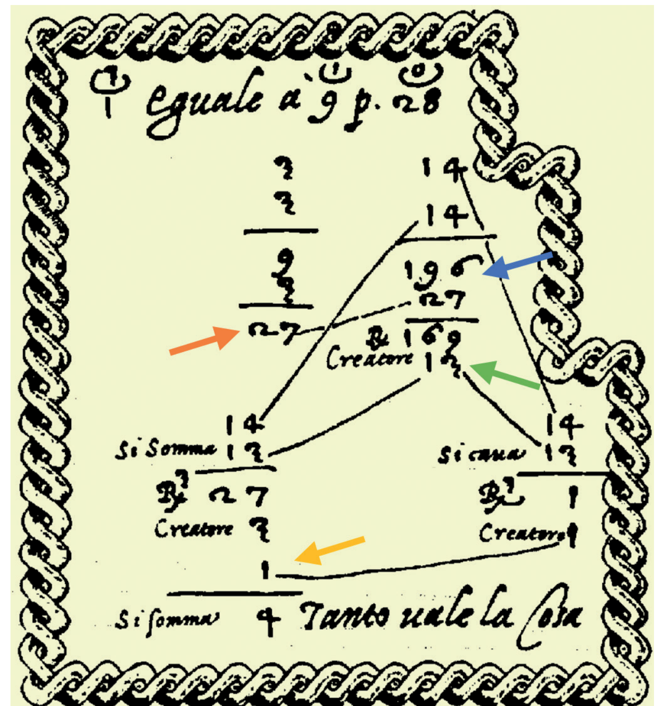
5 p: ℞ m: 15
5 m: ℞ m: 15
25 m: m: 15 q̃d. eſt 40

figuur 1 Oplossing van vraagstuk ‘Vind twee getallen waarvan de som 10 is en het product 40. Uit: G. Cardano, *Ars Magna* (1545)

In de kolom onder de originele tekst uit *Ars Magna*, zie figuur 1, gebruikt Cardano ‘p’ voor più (plus), ‘m’ voor meno (min) en ‘R’ voor wortel, voor de optelling van 5 p:R m:15 en 5 m:R m:15, oftewel 5 + *wortel*(-15) en 5 – *wortel*(-15), dat 25 m:m:15 qd. est. 40 oplevert, oftewel 20 - - 15 = 40.

Bombelli

Rafael Bombelli (1526 - 1572) gaat in zijn enige werk *L’Algebra*, dat pas in 1572 gepubliceerd werd, verder met de algemene oplossingsmethode van Cardano (lees: Tartaglia). Over Bombelli is niet veel meer bekend dan dat hij een ingenieur en architect was en zich bezighield met het droogleggen van moerassen en het bouwen van bruggen. Bombelli werd door latere wiskundigen als Leibniz en Huygens hogelijk gewaardeerd.
L’Algebra is de eerste publicatie waarin wortels uit negatieve getallen gebruikt worden en waarmee gerekend wordt om tot een reële oplossing te komen van bijvoorbeeld derdegraads vergelijkingen.[4]

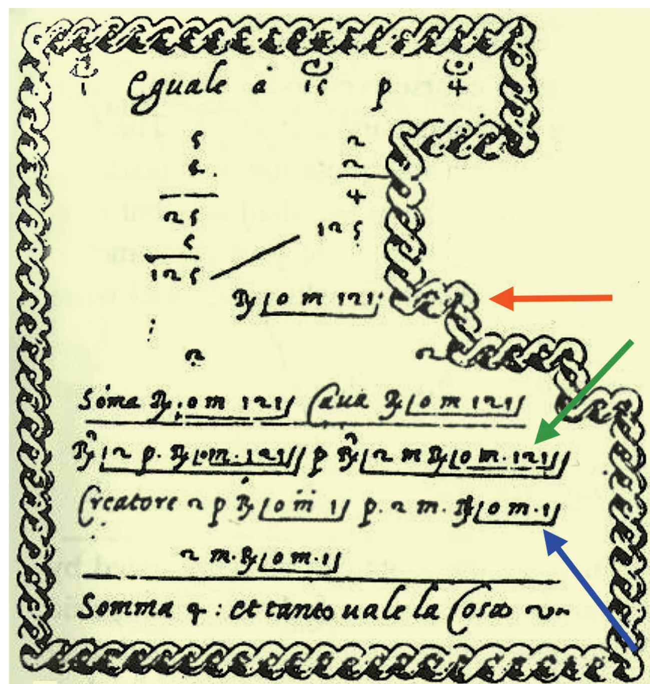


figuur 2 De oplossing van $x^3 = 9x + 28$. Uit: R. Bombelli, *L’Algebra* (1572)

In figuur 2 zie je hoe Bombelli, met gebruikmaking van de oplossingsmethode van Tartaglia/Cardano, de vergelijking $x^3 = 9x + 28$ oplost. (Let ook op de versiering van de oplossing!) Deze methode is voor een geïnteresseerde 3 havo/vwo- leerling prima te volgen.

De notatie van genoemde vergelijking is zonder variabelen maar met de exponenten in ‘kommetjes’ boven de coëfficiënten, wat later bijvoorbeeld ook terug te zien is bij Johan d’Jonghe Stampioen.[5] Net als Stampioen beschouwde Bombelli de vergelijking meetkundig: een kubus is gelijk aan 9 zijdes van de kubus plus 28. Het is eigenlijk jammer dat deze interpretatie door de opkomst van de analytische meetkunde zo in de vergetelheid is geraakt.
In de prachtig gestructureerde oplossingsmethode werkt Bombelli in de rechterkolom bovenaan voor $q = 28$ het kwadraat van q : 2 uit (zie), en in de linkerkolom voor $p = 9$ de derdemacht van p : 3 ( ). Vervolgens gaat hij in de rechterkolom verder met het verschil van het kwadraat en de derdemacht, waar dan de wortel van getrokken wordt ( ). Links gaat Bombelli verder met de optelling van 14 en 13, rechts met het verschil van 14 en 13. De derdemachtswortels van 27 en -1 worden opgeteld (si somma), wat de reële oplossing 4 ( ) oplevert (tanto uale la cosa = zoveel is gelijk aan het ding).
Een leerling zou kunnen denken: ‘Omslachtig, met wat proberen kun je er sneller uitkomen. Maar het werkt blijkbaar...’

In het fragment in figuur 3 kun je zien dat Bombelli met de oplossingsmethode van Cardano/Tartaglia in de vergelijking $x^3 = 15x + 16$ echt aan de slag gaat met (vierkants)wortels uit negatieve getallen.



figuur 3 De oplossing van $x^3 = 15x + 16$ met (vierkants) wortels uit negatieve getallen. Uit: *L'Algebra*

Hij volgt hier dezelfde procedure als bij de vergelijking $x^3 = 9x + 28$.

In $\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$ komt hij dan uit op de wortel uit 0 min 121 (zie ←). Bombelli schrikt hier in zijn geheel niet van en gaat verder met

$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ (↙) creatore

$(2+\sqrt{-1})+(2-\sqrt{-1})$ (↖)wat leidt tot Somma 4: et tanto uale la cosa, de waarde voor wat onbekend was, namelijk de zijde van de kubus.

Bombelli formuleerde in *L'Algebra* ook rekenregels voor het rekenen met wortels uit negatieve getallen. Hij combineerde de woorden 'più' (plus) en 'meno' (min) tot 'più di meno' voor de 'plus van een wortel uit een negatief getal', en tot 'meno di meno' voor een 'min van een negatieve wortel'.[6]
In de vijfde regel van het fragment in figuur 4 uit *L'Algebra* kun je bijvoorbeeld lezen dat een positieve wortel uit een negatief getal vermenigvuldigd met zichzelf een negatief getal wordt. Leerlingen kunnen vervolgens de overige zinnen 'vertalen'.
Over de wortels uit negatieve getallen schrijft Bombelli zelf: '(...) en hoewel dit voor velen buitenissig lijkt – ook ik

Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia meno di meno, fà meno di meno.
Meno uia meno di meno, fà più di meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno uia men di meno, fà più.
Meno di meno uia più di meno, fà più.
Meno di meno uia men di meno fà meno.

figuur 4 Rekenen met wortels uit negatieve getallen. Uit: *L'Algebra*

deelde een tijd lang deze mening, de indruk hebbende dat het meer denkbeeldig was dan waar – bleef ik niettemin proberen totdat ik kon aantonen (...) dat het zonder problemen werkt, en men vaak genoeg de waarde van de *Tanto* als getal kan vinden'.[7]

Noten

[1] Katz, V. (1993). *A history of mathematics*. New York: Harper Collins, p. 329.
[2] Jörgensen, D. (2000). *De rekenmeester*. Den Haag: BZZTôH
[3] Fauvel, J. et al (2000). *History in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Press, p. 305.
[4] Wagner, R. (2010). The geometry of the unknown. In Heeffer, A. & Van Dyck, M. *Philosophical aspects of symbolic reasoning in early modern mathematics* (pp. 229-269). London: College Publications. Artikel is te downloaden op *http://www2.mta.ac.il/~rwagner/publications/geometry%20of%20the%20unknown.pdf*.
[5] Daems, J. (2018). Wortels van de wiskunde. 10: Derdegraads vergelijkingen, *Euclides, 93*(7), pp. 14-16.
[6] Schets 17 in: Berlinghoff, W. & Gouvêa, F.O. (2016). *Wortels van de wiskunde*. Amsterdam: Epsilon, p. 141.
[7] Wagner, R. The geometry of the unknown. In Heeffer, A. & Van Dyck, M. (2010) *Philosophical aspects of symbolic reasoning in early modern mathematics*, College Publications (2010), 229-269.

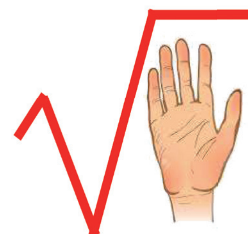
Over de auteur

Peter Lanser is lerarenopleider wiskunde aan de Hogeschool van Amsterdam. Hij verzorgt onderwijs over geschiedenis van de wiskunde in de bacheloropleiding en in de vorm van workshops. Hij is tevens auteur van het zevende Zebra-boekje *De laatste stelling van Fermat* (2000). E-mailadres: *p.t.lanser@hva.nl*

RONDOM WORTEL VIJF

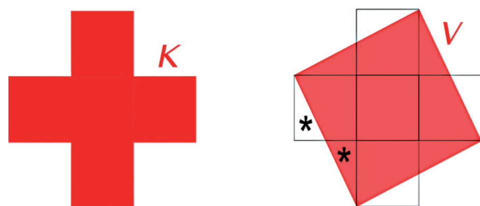
Martin Kindt

Het wonder dat er paren lijnstukken bestaan, waarvan de lengten zich niet verhouden als twee natuurlijke getallen, staan we daar op school nog wel eens bij stil? In de tijd van Pythagoras werden ze daar volgens overlevering wel stil van. Martin Kindt stelt zich voor dat de aandacht hiervoor, mits met veel gevoel voor drama gepresenteerd, door de leerling van vwo of havo als een welkome afwisseling van die eindeloze reeksen willekeurige sommetjes kan worden ervaren.



Van kruis naar vierkant

Het rode kruis (net als zijn witte broertje op de Zwitserse vlag) is samengesteld uit vijf even grote vierkanten. Vier hoekpunten van het kruis K zijn ook hoekpunten van een scheef vierkant V.



figuur 1

In figuur 1 is te zien dat de oppervlakte van V gelijk is aan die van het kruis. Ik beschouw nu de vierkanten waaruit K is opgebouwd als eenheidsvierkanten, met als gevolg dat de oppervlakte van V gelijk is aan 5. Leerlingen kunnen K en V tekenen op millimeterpapier, zodat de oppervlakte van V dan 5 cm^2 wordt, en je kunt dan vragen om de zijde van vierkant V nauwkeurig op te meten. Zij zullen dan vinden dat de uitkomst tussen 2,2 en 2,3 cm ligt. Maar hoe zit het exact?

Benaderen met breuken

Zo'n 2500 jaar geleden deden de Grieken de wonderbaarlijke ontdekking dat er lijnstukken bestaan waarvan de lengten zich niet verhouden als twee gehele getallen. Zulke lijnstukken noemde men *onderling onmeetbaar*. Zij zagen kans hiervoor een waterdichte 'redentheorie' te ontwikkelen[1], wat een ongelooflijke intellectuele prestatie kan worden genoemd. Wat geven we hiervan mee aan onze leerlingen? De lezer zal het moeten beamen: 'bedroevend weinig'. Maar moeten we daar wel bedroefd over zijn? Ik wil absoluut niet beweren dat we zouden moeten proberen een theorie van irrationale getallen aan onze leerlingen op te dringen. Maar de revolutionaire ontdekking dat er onderling onmeetbare lijnstukken bestaan en de getalsmatige interpretatie daarvan, dat zou toch niet onderbelicht mogen blijven! In dit artikel gebruik ik nu eens het getal $\sqrt{5}$ in plaats van het klassieke voorbeeld $\sqrt{2}$.

Natuurlijk ga je dan eerst zoeken naar een breuk tussen 2 en 3 die vermenigvuldigd met zichzelf 5 oplevert.

Op grond van de hiervoor beschreven meting, kun je eerst denken aan $2\frac{1}{4}$.

Het kwadraat hiervan is $\frac{81}{16}$ ofwel $5\frac{1}{16}$, een wat te grote schatting dus. Dat de vierkantswortel uit 5 groter is dan $2\frac{1}{5}$ bleek uit de meting, maar je kunt ook even narekenen hoe veel of weinig het scheelt:

$$2\tfrac{1}{5} \times 2\tfrac{1}{5} = \tfrac{11}{5} \times \tfrac{11}{5} = \tfrac{121}{25} = 5 - \tfrac{4}{25}$$

Tussen $\frac{1}{5}$ en $\frac{1}{4}$ liggen oneindig veel breuken. Een handige en snelle manier om 'tussenbreuken' te vinden is: 'fout optellen', dat wil zeggen tel zowel de tellers als de noemers bij elkaar op. Bij $\frac{1}{5}$ en $\frac{1}{4}$ geeft dit $\frac{2}{9}$, waarvan je bijna met het blote oog kunt zien dat dit inderdaad tussen die twee in ligt.

Dat deze operatie altijd een 'tussenbreuk' geeft, kan met algebra worden bewezen, maar aardiger is een aanschouwelijk bewijs.

Positieve breuken kun je noteren als getallenparen (noemer, teller) en kun je zo voorstellen door vectoren in het eerste kwadrant. Het 'fout optellen' van breuken correspondeert nu met 'goed optellen' van vectoren, met als resultaat een 'tussenvector' met een 'tussenhelling'.[2]

Ik reken nu een paar stappen zo door. De operatie 'fout optellen' is aangegeven met het teken $\oplus$.

$$2\tfrac{2}{9} \times 2\tfrac{2}{9} = \tfrac{20}{9} \times \tfrac{20}{9} = \tfrac{400}{81} < 5$$

$\frac{2}{9} \oplus \frac{1}{4} = \frac{3}{13}$

$2\frac{3}{13} \times 2\frac{3}{13} = \frac{29}{13} \times \frac{29}{13} = \frac{841}{169} < 5$

$\frac{3}{13} \oplus \frac{1}{4} = \frac{4}{17}$

$2\frac{4}{17} \times 2\frac{4}{17} = \frac{38}{17} \times \frac{38}{17} = \frac{1444}{289} < 5$

De resultaten zijn steeds betere onderschattingen.
Het laatste kwadraat verschilt nog slechts $\frac{1}{289}$ van 5.
Die $2\frac{4}{17}$ benadert $\sqrt{5}$ aardig goed.

Ook zonder het voorgaande procedé te volgen kun je wel zien dat $2\frac{4}{17}$ kleiner is dan $2\frac{1}{4}$ $(=2\frac{4}{16}$).

En wat te denken van deze voorstelling:
$2\frac{4}{17} = 2 + \frac{4}{17} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4}}$

De noemer 4 is een beetje groter gemaakt, de breuk wordt dan dus iets kleiner.

Even tussendoor. Ik herinner me een sommetje uit een natuurkundeboek over de bekende lenzenformule, die wel wordt toegeschreven aan Barrow.

$\frac{1}{v} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$

De vraag luidde: *wat gebeurt er met de beeldafstand (b) als de voorwerpafstand (v) groter wordt*? Mijn oudste dochter kwam daar ooit mee thuis en ik liep met haar de meetkundige constructie langs. Zo kwamen we op het antwoord *b* wordt kleiner en zij begreep dit goed.
De volgende dag vroeg ik haar hoe de natuurkundeleraar het had uitgelegd.
Antwoord: heel anders, want hij zei: *als v groter wordt, dan wordt 1 / v kleiner en omdat 1 / v + 1 / b niet verandert, moet 1 / b groter worden en dus wordt b kleiner.* Dit type redeneren, zogezegd majoreren en minoreren, daar zouden we in de wiskundeles best wat meer aan kunnen doen, dacht ik toen en denk ik nog.

Terug naar de benadering van $2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4}}$ van $\sqrt{5}$.
Je kunt dit een breuk met verdiepingen noemen.
Wat gebeurt er als ik er nog zo'n zelfde verdieping bij maak? Ik bedoel:

$2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}}$

Nu is

$4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}} < 4+\frac{1}{4}$

Zodat

$2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}} > 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4}}$

Even narekenen:

$2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4}}} = 2 + \frac{1}{4+\frac{4}{17}} = 2 + \frac{17}{72} = \frac{161}{72}$

Kwadrateren en vergelijken met 5:

$\frac{161}{72} \times \frac{161}{72} = \frac{25921}{5148} = 5 + \frac{1}{5148}$

En ja, een nog scherpere benadering, maar nu aan de bovenkant. De breuk zou ik ook hebben gevonden via de 'foute optelmethode', maar pas drie stappen later. Het heeft er alle schijn van dat het patroon van stapelbreuken, waarbij in elke stap de '4' wordt vervangen door '$4 + \frac{1}{4}$' een snel algoritme geeft om steeds betere breukbenaderingen van $\sqrt{5}$ te leveren. Ook lijkt het erop dat de benaderingen beurtelings boven- en onderschattingen van $\sqrt{5}$ zijn, majoreren en minoreren afgewisseld[3].

(On)eindige afdaling

Het eindcijfer van het kwadraat van een natuurlijk getal kan zijn: 0, 1, 4, 5, 6, 9, en nooit 2, 3, 7, 8. Het kwadraat van een 5-voud eindigt op 0 of 5 en omgekeerd: als het eindcijfer van een kwadraat 0 of 5 is, moet het gekwadrateerde getal een 5-voud zijn. Met deze wetenschap kan worden bewezen dat er geen rationaal getal bestaat waarvan het kwadraat gelijk is aan 5.

Stel dat er natuurlijke getallen a, b bestaan met:

$\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ ofwel $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = 5$

Dan: $a^2 = 5b^2$ ⟶ a^2 is 5-voud

↓

a is 5-voud: $a = 5c$, met c geheel

$b^2 = 5c^2$ ⟶ $b = 5d$, met d geheel

Gevolg: $\sqrt{5} = \frac{5c}{5d} = \frac{c}{d}$ met $c < a$ en $d < b$

Dus uit de veronderstelling dat $\sqrt{5}$ gelijk is aan een breuk met gehele teller en noemer, volgt dat er ook een breuk bestaat met kleinere gehele teller en noemer die gelijk is aan $\sqrt{5}$. Echter dit proces kan niet oneindig doorgaan omdat het ten slotte zou moeten leiden tot de noemer 1.

Maar $\sqrt{5}$ is niet geheel, dus de noemer 1 is uitgesloten. Daarmee is de veronderstelling dat $\sqrt{5}$ gelijk zou zijn aan een breuk met gehele teller en noemer weerlegd. Kortom: *$\sqrt{5}$ is geen rationaal getal.*

Van deze bewijsmethode - 'descente infinie' – een soort omgekeerde volledige inductie, was Fermat de trotse bedenker.[4] Zou je leerlingen op een dergelijk bewijs willen trakteren? Waarom eigenlijk niet? Zelf vond ik als jonge leerling het principe van 'reductio ad absurdum' heel fascinerend en ik heb ervaren dat ook leerlingen die niet dromen van een wiskundige toekomst zo'n redenering wel spannend vinden.

Repeterende kettingbreuk

Ik kom nu terug op de breuken met verdiepingen. Het is inmiddels bewezen dat regelmatige voortzetting van het patroon met de getallen 1 en 4, nooit tot een exact resultaat leidt. Dat het een kwestie van 'oneindig lange adem' is, wordt aangetoond met een staaltje 'wortel-rekenen'. Dit staaltje is om $\sqrt{5} - 2$ en $\sqrt{5} + 2$ met elkaar te vermenigvuldigen. De uitkomst is 1, zodat de twee wortelvormen elkaars omgekeerde blijken te zijn.

En daaruit volgt dan:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2+\sqrt{5}}$$

Nu volgt er een soort Droste-effect:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{2+2+\frac{1}{2+\sqrt{5}}} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{2+\sqrt{5}}}$$

En nog een stap:

$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{2+\sqrt{5}}}}$$

Dit kan eindeloos worden voortgezet:

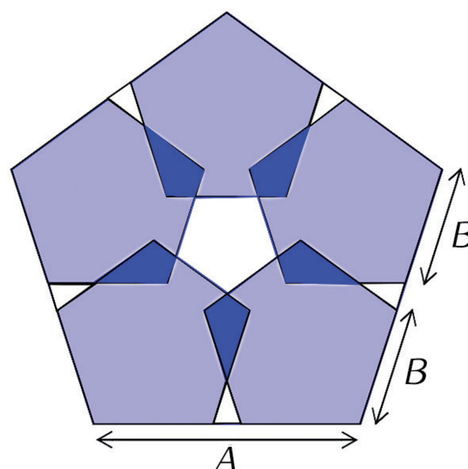
$$\sqrt{5} = 2 + \frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\frac{1}{4+\ldots}}}}}$$

Deze voorstelling heet een *oneindige repeterende kettingbreuk*. Bij afbreken van de kettingbreuk op een willekeurige plaats komt er een rationale benadering van $\sqrt{5}$. Zo'n benadering is des te beter naarmate je verder afdaalt in de kettingbreuk.

Opnieuw de irrationaliteit van √5

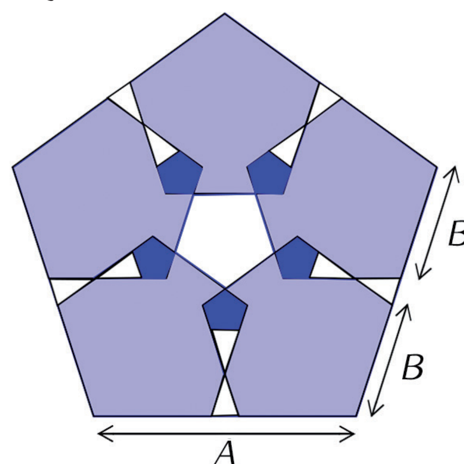
Zie figuur 2. In de regelmatige vijfhoek met zijde A zijn vijf kleine regelmatige veelhoeken (met zijde B) geplaatst.[5]

Veronderstel dat de vijf kleine veelhoeken samen evenveel oppervlakte hebben als de grote vijfhoek, dus dat $A^2 = 5B^2$.



figuur 2

De vijf donkerblauwe overlappingen ('vliegers') hebben dan samen dezelfde oppervlakte als de witte vijfhoek in het centrum samen met de vijf witte driehoekjes aan de rand! In figuur 3 zie je hoe die driehoekjes van de vliegers zijn afgehaald.



figuur3

De witte centrale vijfhoek heeft nu dezelfde oppervlakte als de vijf donkerblauwe vijfhoekjes samen. Dat die witte vijfhoek in het centrum regelmatig is, volgt direct uit de symmetrie van de totale figuur. De donkerblauwe vijfhoekjes zien er ook regelmatig uit, maar dat vraagt nog wel om een bewijs!

Als ik nu eerst even aanneem dat die inderdaad regelmatig zijn, dan kan er weer in Fermats geest worden geredeneerd. Stel dat A en B gehele getallen zijn, waarvoor dus geldt $A^2 = 5B^2$.

De zijden van een donkerblauw vijfhoekje zijn dan elk gelijk aan $A - 2B$ en die van de witte vijfhoek in het centrum zijn dan $B - 2(A - 2B) = 5B - 2A$.

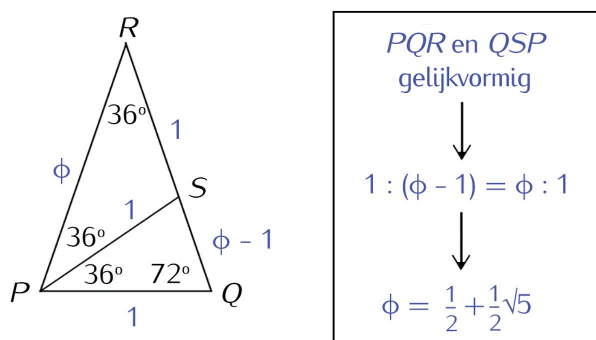
Vanwege de gelijkheid van oppervlakten geldt:

$(5B - 2A)^2 = 5(A - 2B)^2$

Kortom: als er gehele getallen A en B bestaan die voldoen aan $A^2 = 5B^2$, dan zijn er ook kleinere gehele getallen, namelijk $a = 5B - 2A$ en $b = A - 2B$, met de eigenschap $a^2 = 5b^2$. Volgens het principe van de oneindige afdaling zijn er geen gehele getallen die voldoen aan $A^2 = 5B^2$.

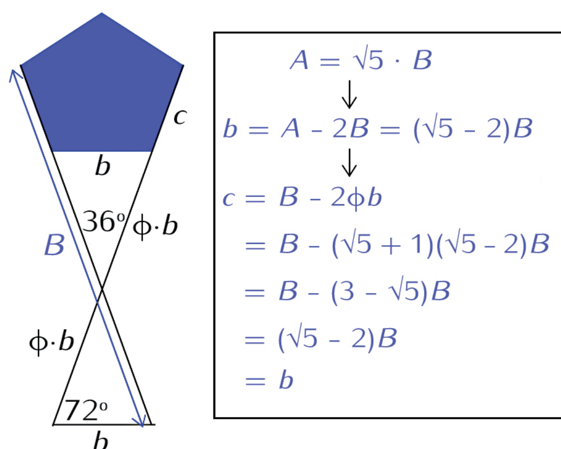
Het guldensnede-getal geeft opheldering

Ik ben de lezer nog het bewijs schuldig dat de vijf kleinste vijfhoekjes regelmatig zijn. Eerst merk ik op dat de basishoeken van de witte driehoekjes elk gelijk zijn aan $180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$. Van zo'n driehoek is de opstaande zijde gelijk aan het guldensnede-getal ($= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$) maal de basis.Waarom ook alweer? Kijk naar figuur 4.



figuur 4

Zie nu verder figuur 5. Als $b = c$, dan is de donkerblauwe vijfhoek zeker regelmatig. Het bewijs dat dit inderdaad het geval is, staat in het kader naast de afbeelding.



figuur 5

Pell-benaderingen

In plaats van '$\sqrt{5}$ is irrationaal' kun je ook zeggen dat de vergelijking $x^2 - 5y^2 = 0$ geen gehele oplossingen heeft. Ik noem een breuk met teller x en noemer y een *Pell-benadering* van $\sqrt{5}$ als x en y voldoen aan één van beide zogeheten *Pellvergelijkingen* $x^2 - 5y^2 = \pm 1$. $2\frac{1}{4}$, de eerstgenoemde benadering in dit artikel, is een Pell-benadering van $\sqrt{5}$, want $9^2 - 5 \cdot 4^2 = 1$.

Dat een Pell-benadering des te nauwkeuriger is naarmate x en y groter zijn, volgt uit

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5 = \pm\left(\frac{1}{y}\right)^2$$

In het regelmatige-vijfhoeken-verhaal is uit het paar (A, B) het kleinere paar (a, b) afgeleid. Omgekeerd volgt uit $(a, b) = (5B - 2A, A - 2B)$ dat $(A, B) = (2a + 5b, a + 2b)$, dat is dan een (lineaire) transformatie van klein naar groot. Ik begin nu met kleinste paar, namelijk (2, 1) dat voldoet aan $x^2 - 5y^2 = \pm 1$ en pas de van-klein-naar-groot-transformatie herhaald toe. Er komt:
$(2, 1) \to (9, 4) \to (38, 17) \to (161, 72) \to \ldots$
De oplettende lezer zal deze getallen herkennen als tellers en noemers van de eerder genoemde kettingbreuken. Dat al deze en de daaropvolgende getallenparen beurtelings oplossingen zijn van $x^2 - 5y^2 = 1$ en $x^2 - 5y^2 = -1$ volgt uit de identiteit:
$(2a + 5b)^2 - 5(a + 2b)^2 = -(a^2 - 5b^2)$

Het feit dat het eerste paar (2, 1) voldoet aan $x^2 - 5y^2 = \pm 1$, garandeert dat alle volgende paren in de ketting waarvan hierboven een begin is gemaakt, dit ook doen! En dat de breuken die overeenkomen met die getallenparen als het ware rondom $\sqrt{5}$ dansen, is nu ook aangetoond. Uit

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5 = \pm\left(\frac{1}{y}\right)^2$$

volgt dan nog dat die breuken onbeperkt dicht bij $\sqrt{5}$ komen.

Noten

[1] Zie: Grootendorst, A. (2006). Enkele aspecten van de wiskunde in de Griekse Oudheid. In M. Keestra (Red.), *Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde.* Amsterdam: Uitgeverij Nieuwezijds.
[2] Kindt, M. (2006). Breuken op de helling (2). *Euclides, 90*(6).
[3] Kindt, M. & Lemmens, P. (2011). *Ontwikkelen met kettingbreuken. Zebra 33.* Amsterdam: Epsilon.
[4] In 1659 schreef Fermat aan Huygens dat hij een bijzondere methode had ontdekt.
[5] Dit idee vond ik in het artikel 'Irrationality from the Book' van Steve J. Miller en David Montague (2010).

Over de auteur

Martin Kindt was leraar, docent lerarenopleiding, leerplanontwikkelaar en onderzoeker. Ook na zijn pensioen is hij nog actief medewerker van het Freudenthal Instituut. E-mailadres: *M.Kindt@uu.nl*

50 JAAR C¿TO, EEN HALVE EEUW WISKUNDE-EXAMENS?

DEEL 4

Ruud Stolwijk

In september 2018 bestond Cito 50 jaar. In het vierde artikel over de rol die Cito door de jaren heen heeft gespeeld bij de wiskunde-examens, bespreekt Ruud Stolwijk de psychometrische aspecten van de examens en wat we daar als docent aan kunnen hebben.



Inleiding

Iedere docent die een toets afneemt in zijn of haar klas, kijkt achteraf hoe deze toets gemaakt is, en past daar eventueel de normering op aan. Om dit te kunnen doen, moet je in ieder geval beschikken over iets als de gemiddelde totale score. Maar soms blijken één of meer vragen uit de toets qua resultaat behoorlijk af te wijken (of tegen te vallen), en daarom is een gemiddelde score per opgave of zelfs per vraag zeker ook een handig hulpmiddel bij het vaststellen van de normering van de toets. Bij examens is dat feitelijk niet anders, met daarbij meteen de opmerking dat waar een enkele klas nog wel eens 'bij toeval' afwijkt ('dit is gewoon niet zo'n goede klas', of 'deze klas is wel heel erg getalenteerd'), dit voor examens eigenlijk niet geldt. Het is immers niet aannemelijk dat een hele leerlingpopulatie, een hele jaargang van duizenden kandidaten, qua wiskundige vaardigheid 'zomaar ineens' zal afwijken van het gebruikelijke. Kortom: de resultaten van een examen-populatie zeggen wel degelijk iets over de moeilijkheid van het betreffende examen in vergelijking met examens van voorgaande jaren. En deze resultaten zijn openbaar! In dit artikel wordt verteld waar die resultaten te vinden zijn, hoe ze te lezen en te interpreteren en wat je als (wiskunde)docent aan deze informatie kunt hebben.
Als voorbeeld in dit artikel gebruiken we steeds hetzelfde examen: havo wiskunde B 2018 1e tijdvak. Het is handig om bij het lezen van dit artikel een laptop, IPad of smart-phone paraat te hebben. Vanaf de Cito-homepage is die route als volgt: voortgezet onderwijs - centrale examens - Alles voor de centrale examens - Examenmateriaal om te oefenen - Examens 2016-2018 en dan het gewenste niveau, jaar en tijdvak kiezen, zie figuur 1.

Van elk examen zijn dus beschikbaar de opgaven (Opg.), of er een gesproken versie van is (Spr.), het correctie-voorschrift (CV), en de toets- en itemanalyse (TIA). Verder zijn er eventueel nog errata in de opgaven (Errata opg.), aanvullingen op het correctievoorschrift (Aanv. CV) en door Cito-medewerkers verzorgde publicaties over het examen (Publ.). In het vervolg van dit artikel zullen we ons richten op de toets- en itemanalyse, kortweg de TIA.

Centrale examens 2018 1e tijdvak

Havo

Toelichting op de tabel en de documenten

Examen	Opg.	Spr.	CV	TIA	Errata opg.	Aanv. CV	Publ.
natuurkunde							
geschiedenis							
Engels							
filosofie							
tekenen, handvaardigheid, textiele vormgeving							
muziek							
Nederlands							

figuur 1

Toets- en itemanalyse

Als we de TIA aanklikken, verschijnt (voor havo wiskunde B 2018 1e tijdvak) een Word-document van 55 pagina's. Dat lijkt erg veel, maar voor de meest interessante infor-matie kunnen we ons beperken tot de eerste bladzijde. De rest wijst zich daarna grotendeels vanzelf en dat laten we dan ook aan de lezer.
De eerste bladzijde ziet er gedeeltelijk uit zoals te zien is in figuur 2.

In deze tabel zijn de gegevens verwerkt van alle in WOLF ingevoerde kandidaten. We bekijken de tabel van links naar rechts en zien dat dit examen bestaat uit 18 vragen, verdeeld over acht opgaven: elke eerste vraag van een opgave is gemarkeerd met een #. Het gewicht van elke vraag (de kolom Gew.) is gelijk – los van het te behalen aantal scorepunten natuurlijk. Daarna zien we twee kolommen (O/D en Missing) waarin te zien is welk percentage van de leerlingen respectievelijk het aantal leerlingen dat de betreffende vraag heeft overgeslagen.

Item	Item			Mis-	Gewogen							
Label	nr.	Gew.	O/D	sing	Max	Gem	P	Sd	RSK	Rit	Rir	AR
1#	1	1	0	8	3	2,42	81	1,02	0,34	36	29	78
2	2	1	0	54	6	5,05	84	1,45	0,24	49	39	77
3	3	1	5	630	3	0,53	18	0,84	0,28	35	29	78
4#	4	1	1	163	6	4,74	79	2,02	0,34	56	43	77
5	5	1	2	297	4	3,02	75	1,34	0,34	46	37	78
6#	6	1	2	279	3	2,25	75	1,17	0,39	28	19	79
7	7	1	1	97	3	2,39	80	0,94	0,31	33	26	78
8	8	1	5	595	5	3,55	71	1,89	0,38	52	39	77
9#	9	1	2	191	6	3,04	51	1,81	0,30	60	50	76
10#	10	1	1	128	3	2,21	74	1,02	0,34	41	34	78
11	11	1	4	546	3	1,62	54	1,30	0,43	38	28	78
12	12	1	2	271	5	3,60	72	1,54	0,31	47	36	78
13#	13	1	2	265	5	2,93	59	1,97	0,39	61	50	77
14	14	1	5	641	6	1,70	28	1,90	0,32	45	31	78
15#	15	1	3	406	3	1,93	64	1,28	0,43	44	35	78
16	16	1	12	1484	4	1,86	47	1,56	0,39	51	41	77
17#	17	1	6	701	4	1,78	45	1,49	0,37	53	44	77
18	18	1	7	892	5	2,31	46	1,50	0,30	53	43	77

figuur 2

Zo is te zien dat vraag 16 door maar liefst 1484 kandidaten (12%) is overgeslagen. Deze informatie is van belang bij het bepalen van de normering, want met name als er aan het eind veel kandidaten vragen hebben overgeslagen, dan zou dit een teken van tijdnood kunnen zijn. Als we verder kijken, zien we kolommen met de maximumscore die voor de vraag behaald kan worden (Max), de behaalde gemiddelde score door de kandidaten (Gem), en de zogenoemde p-waarde (P): het percentage van de scorepunten die er gemiddeld voor de vraag werden behaald. Uiteraard geldt hierbij dat
P = 100 × Gem / Max. Dan volgen twee kolommen die te maken hebben met de spreiding van de scores binnen de betreffende vraag (Sd en RSK). De eerste geeft de standaardafwijking van de behaalde scores, de relatieve standaardafwijking (RSK) maakt de standaardafwijkingen van de verschillende vragen onderling vergelijkbaar door deze steeds te delen door de maximumscore (dus RSK = SD / Max). De naam RSK is overigens ontleend aan oud-Cito-medewerker Wiel Knops (Relatieve Standaardafwijking Knops).

Rit en Rir

De kolommen Rit en Rir verdienen wat extra aandacht. De eerste, Rit, is de correlatie (weergegeven in een getal tussen –100 en 100) tussen de score van de vraag en de totaalscore van de toets inclusief de score op de vraag zelf (het hele examen dus). De Rit van een vraag geeft dus aan in hoeverre de betreffende vraag representatief is voor de toets als geheel. Een hoge Rit-waarde betekent dat veelal de goede kandidaten hoge scores op deze vraag wisten te behalen, en minder goede kandidaten minder hoge scores. Maar wat is nu een hoge Rit-waarde? Gangbaar is dat een Rit-waarde onder de 20 als 'laag' wordt gezien: de betreffende vraag levert dan statistisch gezien eigenlijk niet of nauwelijks een bijdrage aan het examen als geheel. En vragen met negatieve Rit-waarden zijn zelfs uit den boze, want die zouden aangeven dat een kandidaat die een goed examen maakt op een dergelijke vraag juist slecht zou scoren. En dan meet je met zo'n vraag wel iets heel merkwaardigs - bijvoorbeeld iets wat in de rest van de toets niet wordt gemeten. Verder zijn Rit-waarden vanaf 30 'goed' te noemen, en vanaf 40 zelfs 'zeer goed'.
De Rir-waarde is vrijwel hetzelfde als de Rit-waarde, zij het dat de Rir-waarde de correlatie weergeeft tussen de score van de vraag en de totaalscore van de toets minus de score op de vraag zelf - de correlatie met de rest van de toets dus. De Rit zal dus nooit lager kunnen zijn dan de Rir. In de tabel is te zien dat wat betreft de Rit- en Rir-waarden het examen havo wiskunde B 2018 1e tijdvak louter vragen bevatte die voor een duidelijk onderscheid zorgden tussen vaardige en minder vaardige kandidaten. En dat is uiteraard de bedoeling van een examen.

Betrouwbaarheid

Het boven de kolommen vermelde 'Gewogen' geeft overigens aan dat er bij de berekening rekening is gehouden met alleen die kandidaten die de vraag ook echt gemaakt hebben - dus de Missing-kandidaten zijn daarbij weggelaten. De laatste kolom in de tabel (AR) betreft de betrouwbaarheid. AR staat hierbij voor *alpha-rest* en dit is de betrouwbaarheid (vermenigvuldigd met 100) van het examen minus het betreffende item. Maar wat is dan precies betrouwbaarheid? Betrouwbaarheid is in het geval van toetsen en examens de mate waarin de scores van de kandidaten consistent, nauwkeurig en reproduceerbaar zijn. Dat betekent dat het zo zou moeten zijn dat als dezelfde kandidaat met dezelfde voorkennis onder dezelfde omstandigheden dezelfde toets tweemaal zou maken, de kandidaat ook tweemaal dezelfde score zou moeten halen. Dat dit echter louter theorie is moge duidelijk zijn... Daarom zijn er statistische methoden ontwikkeld om deze theorie zo dicht mogelijk te benaderen en de betrouwbaarheid zo goed mogelijk te schatten. Een van de meest gebruikte schattingen voor de betrouwbaarheid van een toets is de volgende:

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(S_i^{\,2}\right)}{\left(S_x\right)^2}\right)$$

Hierbij is α de betrouwbaarheid, *k* het aantal vragen in het examen, S_i^2 de variantie (ofwel het kwadraat van de standaardafwijking) van de scores bij vraag i en S_x^2 de variantie van de totaalscores. Met behulp van deze formule is het (zeker in Excel) overigens niet zo heel moeilijk om (een schatting voor) de betrouwbaarheid van je eigen toets te berekenen.

Je kunt deze formule ook anders schrijven:

$$\alpha = \frac{k}{k-1}\left(1-\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(S_i^{\,2}\right)}{\sum_{i=1}^{k}\left(Rit \cdot S_i\right)}\right)$$

Hierbij is Rit de correlatie tussen de scores van vraag i en de scores op de totale toets. Aan deze tweede formule voor α is te zien dat de eerder besproken Rit-waarden inderdaad verband houden met de betrouwbaarheid: hoe hoger de Rit, hoe hoger de betrouwbaarheid. Verder is ook in te zien dat, als het aantal vragen groter wordt (mits natuurlijk vragen die toetsen wat je ook echt in het examen wil toetsen), de betrouwbaarheid dan ook groter zal zijn.

Wat nu precies de minimale betrouwbaarheid van een toets of examen moet zijn, hangt onder andere af van het aspect of de toets of het examen het enige middel is om de vaardigheid van de kandidaat te bepalen. Bij examens is het zo dat het examen per vak voor 50% deze vaardigheid bepaalt (er is immers ook nog het schoolexamen); in een dergelijke situatie worden in de literatuur betrouwbaarheden van minstens 0,65 genoemd. De α van het examen dat we hier steeds bekijken, havo B 2018-1, is met 0,79 dan ook 'heel behoorlijk' te noemen.
De theorie gaat ervan uit dat een toetsscore altijd is opgebouwd uit twee delen: een ware score en een meetfout. De ware score wordt daarbij bepaald door de vaardigheid van de kandidaat in combinatie met de moeilijkheid van de toets. De toetsscore hangt echter ook af van 'de vorm van de dag', de toevallige verdeling van de vragen over de stof (en net dat éne onderwerp waar de kandidaat niet zo goed in is zat er wat vaker in), hoofdpijn, of de net iets te hoge temperatuur in de examenzaal. Deze laatste aspecten vertroebelen in feite het zicht op de werkelijke vaardigheid van de kandidaat en vormen gezamenlijk de meetfout. Als je nu een kandidaat meermalen dezelfde of een vergelijkbare toets zou laten maken, dan zou het effect van die meetfout wel uitgefilterd kunnen worden. Maar dat is nu eenmaal in de praktijk niet mogelijk. Daarom is het van belang om de meetfout zo klein mogelijk te krijgen, met als probleem dat de meetfout moeilijk te meten valt… we werken immers louter met toetsscores. Statistisch kan echter uit de betrouwbaarheid (waarvan hierboven is aangegeven hoe deze uit de toetsresultaten berekend kan worden) worden bepaald hoe groot de bijdrage van de meetfout aan de variantie van de toetsscores is… maar dat voert in het kader van dit artikel wel wat te ver.

Tot slot

Wat heb je hier als docent nu allemaal aan - los van mogelijk wat meer begrip voor de analyse van examens op zich? Om te beginnen kun je natuurlijk terugkijken op de resultaten van je eigen examenklas met behulp van de door Cito geleverde groepsrapportage. Maar dat is achteraf… Misschien is het grootste voordeel wel dat je, als je oude examenopgaven en -vragen gebruikt voor eigen toetsen, je van tevoren te weten kunt komen hoe moeilijk deze opgaven en vragen zijn door in de betreffende TIA te kijken. En dat vragen met hoge Rit- en Rir-waarden leerlingen met goede en minder goede vaardigheden goed weten te onderscheiden. En dat kan - mits de leerlingen de (immers openbare) opgaven niet al geoefend hebben natuurlijk - een hulpmiddel zijn om te zien of jouw klas wel of niet op het gewenste niveau zit.

Noot

[1] *https://www.cito.nl/onderwijs/voortgezet-onderwijs/centrale-examens-voortgezet-onderwijs/examenmateriaal-om-te-oefenen/havo-2018/havo-2018-tv1*

Over de auteur

Ruud Stolwijk is toetsdeskundige wiskunde bij Cito.
E-mailadres: ruud.stolwijk@cito.nl

VERSCHENEN

STATISTIEKONDERWIJS VOOR MORGEN

Titel: Statistiekonderwijs voor morgen
Auteurs: Werkgroep Wiskunde voor Morgen
Uitgever: NVvW
Prijs: gratis te downloaden van de Euclides site

Computers en andere digitale apparatuur hebben de wereld diepgaand veranderd, en veranderen de wereld nog steeds. In het reken- en wiskundeonderwijs heeft dat tot aanpassingen geleid - leerlingen gebruiken rekenmachines, computer en tablet worden ingezet als onderwijshulpmiddelen - maar de doelen van het reken- en wiskundeonderwijs zijn grotendeels dezelfde gebleven. De werkgroep Wiskunde voor Morgen pleit voor een fundamentele bezinning op die doelen. Omdat we denken dat de discussie gebaat is met concrete voorbeelden, hebben leden van de werkgroep op persoonlijke titel artikelen geschreven rond het thema 'Statistiek voor Morgen'. Statistiek wordt hier breed opgevat, ook de eerste verkenningen van basale begrippen en grafische representaties die in het PO plaats vinden, rekenen we hiertoe. Er is niet geprobeerd om een gebalanceerd overzicht te geven van wat er in toekomstgericht statistiekonderwijs moet worden nagestreefd. Het doel van de artikelen is om als katalysator te dienen voor een discussie over de doelen van het reken- en wiskundeonderwijs, in het licht van de eisen die de toekomst stelt. De werkgroep Wiskunde voor Morgen is een gezamenlijke werkgroep van de Nederlandse Vereniging voor de Ontwikkeling van het Reken-Wiskunde Onderwijs (NVORWO) en van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW). Dit boekje is mogelijk gemaakt met financiële steun van de NVvW.

vakbladeuclides.nl/statistiekvoormorgen

UITDAGENDE PROBLEMEN

Jacques Jansen

DE ERDŐS-MORDELL ONGELIJKHEID EN DE DRIEHOEKSFORMULE VAN EULER

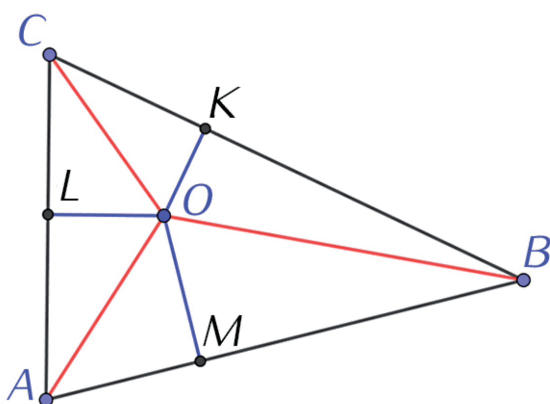
De Erdős-Mordell ongelijkheid zou wel eens geïnspireerd kunnen zijn op de driehoeksformule van Euler. Jacques Jansen ziet er uitdagende problemen in, ook voor leerlingen.



Paul Erdős (1913 – 1996)

'Dit artikel is voor de levenden onder ons. Immers als je niet meer op onderzoek uit ben, ben je dood. Het voordeel van dood zijn is dat je niet meer dommer wordt.'

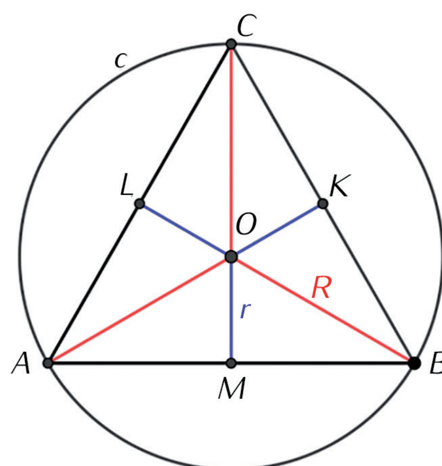
Schrik niet lezer. Het is een uitspraak van de bekende Hongaarse wiskundige Paul Erdős.
Een van de mooiste hoofdstukken van het onlangs verschenen boek *Priemwoestijnen*[1] van Alex van den Brandhof gaat over de Erdős-Mordell ongelijkheid. Paul Erdős is geboren op 26 maart 1913 in Budapest en op 20 september 1996 overleden in Warschau. Een markante persoonlijkheid. Hij reisde veel en bedacht talrijke wiskundeproblemen en probeerde die samen met anderen op te lossen. In 1935 stond in de rubriek 'Advanced Problems' (no 3750) van *The American Mathematical Monthly* onder andere dit meetkundeprobleem:



figuur 1

Vanuit een willekeurig punt O binnen een gegeven driehoek ABC worden de loodlijnen OK, OL en OM op de zijden getekend. Bewijs dat $OA + OB + OC \geq 2(OK + OL + OM)$, zie figuur 1. Het probleem werd al snel opgelost maar de bewijzen waren niet bepaald elegant en daar ging Erdős juist wel voor.

Een aardig begin om zo'n opgave aan te pakken, is kijken naar een bijzondere situatie: een gelijkzijdige driehoek waarbij we punt O ook nog zo kiezen dat het het middelpunt van de omgeschreven cirkel is. Het middelpunt van de ingeschreven cirkel noemen we I. Bij deze driehoek vallen O en I samen. ΔAMO is dan een halve gelijkzijdige driehoek waarvoor geldt: $AO = 2OM$, zie figuur 2.

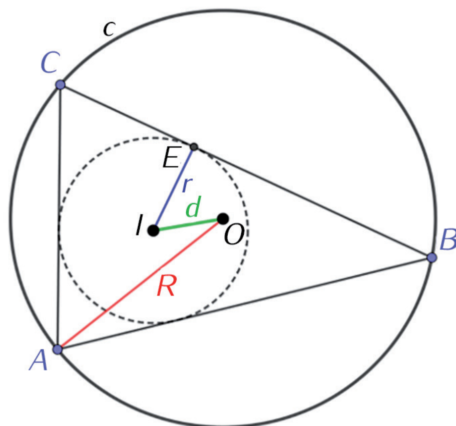


figuur 2

Laten we eerst de stralen van een omgeschreven en een ingeschreven cirkel van een driehoek een naam geven. Dat wordt dan achtereenvolgens R en r. Er geldt $R = 2r$ en $OA + OB + OC = 2(OK + OL + OM)$.

Hoe kwam Erdős aan die vraagstelling?

Van den Brandhof schrijft in zijn boek dat hij een vermoeden heeft hoe Erdős op zijn probleem kwam. Erdős zocht misschien naar een variant van de driehoeksformule van Euler. Maar wat houdt die formule dan in? De afstand tussen de middelpunten *O* en *I* noemen we *d*. Die formule van Euler geeft dan een verband tussen deze afstand *d* en de beide stralen *R* en *r*: $d^2 = R^2 - 2 \cdot r \cdot R$, zie figuur 3. We zien dat als *O* en *I* samenvallen, dan $d = 0$. Dus moet $d^2 = R^2 - 2 \cdot r \cdot R = 0$ en dat levert op $R = 0$ of $R = 2r$ en dus geldt $OA + OB + OC = 2(OK + OL + OM)$. Euler vond deze formule in 1765.



figuur 3

De driehoeksformule van Euler kwam als opgave 6 terug bij International Mathematical Olympiad[2] in 1962, zie figuur 4.

1962/6.
Consider an isosceles triangle. Let r be the radius of its circumscribed circle and ρ the radius of its inscribed circle. Prove that the distance d between the centers of these two circles is

$$d = \sqrt{r(r - 2\rho)}.$$

figuur 4

De opgaven van de IMO zijn niet bepaald kinderachtig. In figuur 5 zie je de eerste opgave van de wedstrijd van afgelopen juli. Een uitdaging! En natuurlijk GeoGebra inzetten....



Maandag 9 juli 2018

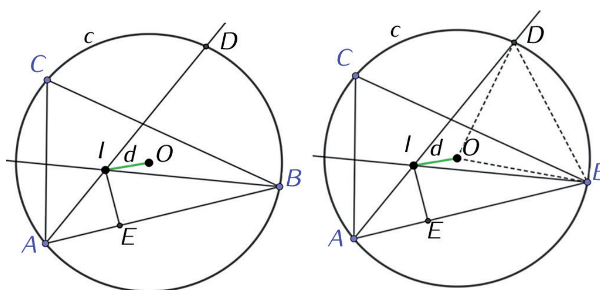
Opgave 1. Zij Γ de omgeschreven cirkel van een scherphoekige driehoek *ABC*. De punten *D* en *E* liggen respectievelijk op de lijnstukken *AB* en *AC* zodanig dat $|AD| = |AE|$. De middelloodlijn van *BD* snijdt de boog *AB* van Γ die *C* niet bevat in het punt *F*.
De middelloodlijn van *CE* snijdt de boog *AC* van Γ die *D* niet bevat in het punt *G*.
Bewijs dat de lijnen DE en FG evenwijdig zijn (of samenvallen).

figuur 5

Afleiding driehoeksformule

We bekijken nu twee aanpakken om de driehoeksformule $d^2 = R^2 - 2 \cdot r \cdot R$ van Euler af te leiden. Je mag zelf uitmaken welke aanpak de elegantste is.

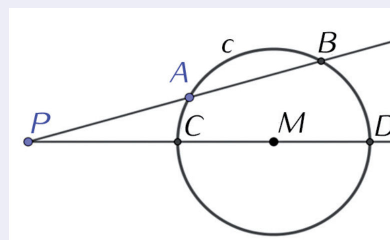
Eerste aanpak



figuur 6

De macht van punt *I* ten opzichte van omgeschreven cirkel *c* is $d^2 - R^2$. Mocht je niet meer weten wat een macht is, zie het kader. Merk op dat deze macht negatief is. Er geldt: $R^2 - d^2 = IA \cdot ID$. De grootte van de hoeken in driehoek *ABC* geven we aan met α, β en γ. Lijn *IA* is bissectrice van ∠*A*. Het tweede snijpunt van deze lijn met cirkel *c* noemen we punt *D*. Er geldt: $\sin(½\alpha) = r / IA$. (zie Δ*AEI* met $IE = r$). Dus $IA = r / \sin(½\alpha)$. Nu nog een uitdrukking vinden voor *ID*. Maar wat blijkt, $ID = BD$ (je kunt alvast nagaan waarom dat zo is). Zie nu figuur 6. We hebben driehoek *OBD* gestippeld getekend. Middelpuntshoek ∠*BOD* is gelijk aan α. Er geldt: $\sin(½\alpha) = ½BD / R$.
En dat geeft: $BD = 2R\sin(½\alpha)$. $R^2 - d^2 = IA \cdot ID$ en dan maar substitueren in het rechterlid:
$r / \sin(½\alpha) \cdot 2R \cdot \sin(½\alpha) = 2rR$.
En hiermee vinden we: $d^2 = R^2 - 2 \cdot r \cdot R$.
En waarom was nu *ID* gelijk aan *BD*? $\angle DIB = ½\alpha + ½\beta$ (buitenhoek in ∠*ABI*). $\angle IBD = \angle CAD + ½\beta = ½\alpha + ½\beta$ (omtrekshoeken die op bogen staan).

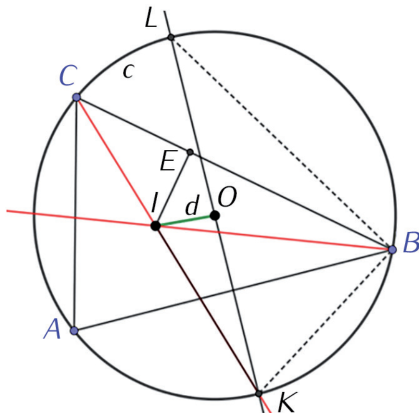
Macht van een punt t.o.v. een cirkel



figuur 7

In figuur 7 is een cirkel *c* getekend met middelpunt *M* en straal *r* en een willekeurig punt *P* buiten de cirkel. Vanuit *P* zijn twee halflijnen getekend die de cirkel snijden. Een van de halflijnen gaat door middelpunt *M*. Er geldt $PA \times PB = PC \times PD = PM^2 - r^2$. Dit volgt uit het feit dat $\Delta PAD \sim \Delta PCB$. Hoe je punt *A* ook kiest op cirkel *c*, de waarde van het product $PA \times PB$ blijft onveranderd. Deze waarde noemen we de macht van punt *P* ten opzichte van cirkel *c*. Punt *P* kan ook op of binnen de cirkel worden gekozen.

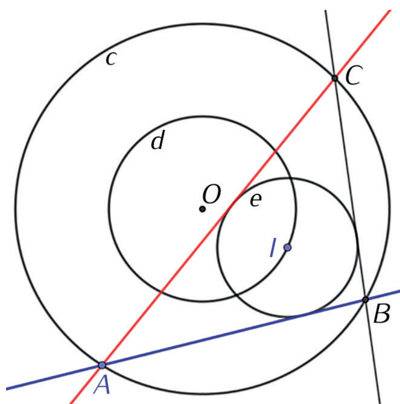
Tweede aanpak (van O. Bottema[3])
Punt E is nu het voetpunt van een loodlijn uit punt I op zijde BC. Een middellijn van cirkel c snijdt de cirkel in de punten K en L, zie figuur 8.



figuur 8

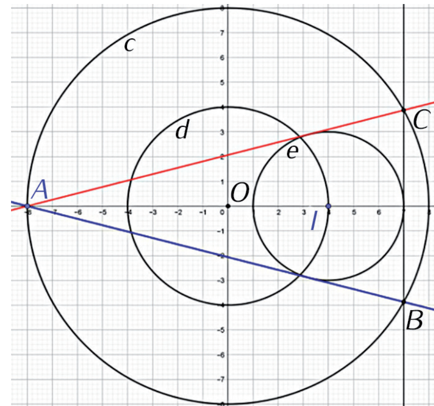
$\angle KBI = ½\gamma + ½\beta$ (omtrekshoeken op bogen)
$\angle BIK = ½\gamma + ½\beta$ (buitenhoek ΔCIB)
Dus $KB = KI$
$\Delta ICE \sim \Delta KBL$ want $\angle CEI = \angle KBL = 90^o$ en $\angle ICE = \angle KLB = ½\gamma$.
Dit levert de volgende vergelijking op: CI / $KL = r$ / BK. Immers $EI = r$. Verdere substitutie: CI / $2R = r$ / KI. We zien weer de macht van punt I ten opzichte van cirkel c verschijnen: $CI \cdot KI = r{\cdot}2R$. En dat leidt tot: $R^2 - d^2 = r{\cdot}2R$. Anders geschreven: $d^2 = R^2 - 2{\cdot}r{\cdot}R$.

Terugblik op relatie $d^2 = R^2 - 2{\cdot}r{\cdot}R$
(1) We concentreerden ons op de ingeschreven cirkel van een driehoek. Maar naast de omgeschreven cirkel zijn er ook nog drie aangeschreven cirkels. En ja, daarvoor hebben we een soortgelijke relatie: $d^2 = R^2 + 2{\cdot}r{\cdot}R$. Maar opgepast, r is nu de straal van de aangeschreven cirkel. We kunnen dan beter opschrijven: $d_a{}^2 = R^2 + 2{\cdot}r_a{\cdot}R$. Ga deze relatie maar na!
(2) Kun je met de relatie $d^2 = R^2 - 2{\cdot}r{\cdot}R$ een driehoek vastleggen?



figuur 9

Laten we een getallenvoorbeeld nemen waarbij $R = 8$ en $r = 3$. Dat geeft voor de d-waarde 4. We tekenen in GeoGebra een (omgeschreven) cirkel c met straal 8 en noemen het middelpunt O. Vervolgens tekenen we een concentrische cirkel d met straal 4 en kiezen daar een punt I op. Dan tekenen we een (ingeschreven) cirkel e met I als middelpunt en straal 3, zie figuur 9.
We kiezen punt A op cirkel c en trekken vanuit dit punt raaklijnen aan cirkel e. Het tweede snijpunt van de raaklijnen met cirkel c noemen we achtereenvolgens B en C. En het lijkt er sterk op dat lijn BC raakt aan cirkel e. Er zijn waarschijnlijk oneindig veel driehoeken die c en e hebben als omgeschreven en ingeschreven cirkel met $OI = 4$. Een uitdaging voor je om dit te bewijzen.



figuur 10

Voor de (havo)leerlingen een heel specifiek (symmetrisch) geval. Punt O, middelpunt van omgeschreven cirkel c kiezen we in de oorsprong van een gecoördineerd vlak, zie figuur 10. Voor punt A kiezen we het punt (-8, 0) op cirkel c en voor punt I het punt (4, 0). In GeoGebra kunnen we met één klik de raaklijnen vanuit punt A tekenen aan cirkel e. De lijn BC is dan vermoedelijk de derde raaklijn. De leerlingen mogen dan bewijzen dat lijn BC cirkel e raakt. (cirkel d kun je hierbij weglaten).

Meer weten?
Over de Erdös-Mordell ongelijkheid. In 1937 werd een trigonometrische oplossing gepubliceerd door de Brit L.J. Mordell en de Amerikaan D.F. Barrow. En zie natuurlijk het boek *Priemwoestijnen* voor actuelere oplossingen en de elegantie ervan.

Bronnen
[1] Brandhof, A. van der (2018). *Priemwoestijnen. Hoogtepunten uit de wiskunde van de 21e eeuw.* Amsterdam: Prometheus.
[2] IMO International Mathematical Olympiad. Zie: https://www.imo-official.org/
[3] Bottema, O. (1997). *Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde.* Utrecht: Epsilon Uitgaven.

Over de auteur
Jacques Jansen was veertig jaar docent wiskunde.
Hij is sinds 1 augustus 2014 met pensioen.
E-mailadres: *jacques.jansen@wxs.nl.*

VASTGEROEST

IK LEER HET NOOIT!

Ab van der Roest

Een toetsvraag die niet oplevert wat je er van verwacht, het overkomt ons allemaal vast wel eens. Zo ook Ab van der Roest…

Herken je dit? Je maakt een toets, maar je wilt niet alleen maar letterlijk terugvragen. Je stelt dus vragen waarbij je van tevoren denkt: ‘Hier ga ik commentaar op krijgen.’ Maar nadat de klas de toets gemaakt heeft blijft het commentaar achterwege en bij het nakijken wordt zo’n vraag door een groot deel van de groep goed gemaakt. Je vraagt je dan af, of de vraag toch goed was, of toch te veel herkenbaar. Maar, gelukkig heeft niemand schade geleden.
Het tegenovergestelde komt ook veel voor. Je stelt een vraag op de toets waarvan je verwacht dat leerlingen die meteen en zonder veel nadenken kunnen beantwoorden. Je hebt de stof behandeld, de leerlingen hebben ermee geoefend en je beschouwt de vraag als bijna uit de categorie reproduceren, maar zeker als toepassen in een bekende situatie. Maar bij het corrigeren van de toets blijken de meeste leerlingen allerlei wegen in te slaan die jij niet van tevoren bedacht hebt. Niet zo erg, maar bijna geen enkele leerling komt tot het goede antwoord en na deze vraag worden de resterende vragen onder grote tijdsdruk gemaakt. Eigenlijk is de toets een beetje verknoeid door die ene vraag en je vraagt je vertwijfeld af of je ooit zult leren om de toetsvragen goed in te schatten.
Na bijna 40 jaar ervaring kan ik nog steeds niet goed inschatten of een toets zulke vragen bevat. Bij de laatste toetsweek was er weer zo’n toets, die me de verzuchting bezorgde: ‘Ik leer het nooit!’
vwo-5 wiskunde B. In de methode *Getal & Ruimte* wordt behandeld dat de lijnen l: $ax + by = c$ en k: $px + qy = r$ samenvallen als $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$.

Ik probeer de leerlingen bij dit stukje stof op het spoor te krijgen dat dit niets nieuws is, maar dat we dat al lang weten. Want uitgaande van ‘evenwijdige lijnen hebben dezelfde richtingscoëfficiënt’ is meteen in te zien dat $-\frac{a}{b} = -\frac{p}{q}$ en dat is eenvoudig te herleiden tot $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$.

Door deze evenredigheid en ‘het gelijk zijn’ van de vergelijkingen moet die evenredigheid ook gelden voor c en r. Mijn advies aan de leerlingen is dan om deze regel niet apart te gaan leren (denk aan onze beperkte geheugencapaciteit), maar om te gebruiken wat al lang in ons systeem aanwezig is.
Dan de toetsvraag die letterlijk uit de toetsbundel komt:

De lijn k snijdt de assen in de punten $A(p + 2, 0)$ en $B(0, 2p - 2)$.
De lijn l snijdt de assen in de punten $C(2p, 0)$ en $D(0, q + 1)$.
Bereken algebraïsch voor welke p en q de lijnen samenvallen.

Juist omdat ik de leerlingen geadviseerd heb niet meteen naar de in het boek gehanteerde formule te grijpen, maar eerst eens goed na te denken en te vertrouwen op veel eerder opgedane kennis verwachtte ik het eenvoudige antwoord: $p + 2 = 2p$ en $2p - 2 = q + 1$ want als lijnen samenvallen hebben ze dezelfde snijpunten met de x-as en y-as.

Helaas! Alle leerlingen schreven k: $\frac{x}{p+2} + \frac{y}{2p-2} = 1$ en l: $\frac{x}{2p} + \frac{y}{q+1} = 1$ op.

Deze vergelijkingen werden herleid tot
k: $(2p - 2)x + (p + 2)y = 2p^2 + 2p - 4$ en
l: $(q + 1)x + 2py = 2pq + 2p$ waaruit de volgende evenredigheid verscheen:

$$\frac{2p-2}{q+1} = \frac{p+2}{2p} = \frac{2p^2+2p-4}{2pq+2p}.$$

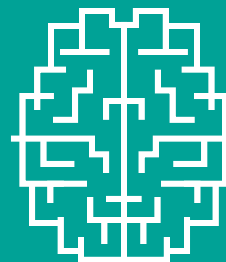
En de oplossing van deze evenredigheid was na veel dwalen voor bijna niemand te doen. Die lastige p en q zaten elkaar in de weg. De makkelijkste conclusie zou zijn dat die leerlingen zo dom zijn, maar dat is te kort door de bocht. Daarom mijn verzuchting dat ik het nooit leer. Maar er kwam toch nog een staartje aan dit verhaal. Bij de bespreking van de toets knalde opeens door de klas: ‘Het is zo simpel, wat ben ik stom.’ Ik was het niet die dat riep.

Over de auteur

Ab van der Roest is docent wiskunde aan het Ichthus College te Veenendaal.
E-mailadres: *rst@ichthuscollege.nl*

PUZZEL 94-4

RAAD EENS HOE WE DAT TELLEN MOETEN



Lieke de Rooij
Wobien Doyer

Een oud rijmpje:

De boeren van het Kennemerland
hebben tien vingers aan iedere hand
vijf en twintig aan handen en voeten
raad eens hoe we dat tellen moeten.

Het gaat dus over tellen, niet met handen en voeten, maar wel zo handig mogelijk.

Frans van Hoeve stuurde ons een idee om wat moeilijkere variaties te maken op de Olympiadepuzzel in *Euclides* 93-4. Die luidde als volgt:
M is het getal bestaande uit 2017 enen achter elkaar. $N_0 = 2017$ en N_{i+1} = som van de cijfers van het product $N_i \cdot M$. Zo kunnen we recursief de getallen N_1, N_2, N_3, ... bepalen. En dan blijkt dat $N_1 = N_2 = N_3 = ...N_i = 2044$. Een uitwerking is te vinden op de site van de NVvW.

We introduceren het getal m = aantal enen van M. We noemen m en N_i maatjes als $N_i = N_{i+1}$. Dus $m = 2017$ en $N_i = 2044$ zijn maatjes. In dit geval volgt dit uit de rij die begint met $N_0 = 2017 = m$. Er zijn echter ook maatjes die niet volgen uit $N_0 = m$, zoals bijvoorbeeld de maatjes $m = 64$ en $N_i = 137$. Dan is inderdaad $N_{i+1} = 137$, maar als $N_0 = 64$ met $m = 64$ krijgen we $N_1 = N_2 = ...73$ en nooit $N_i = 137$.

Bij alle vragen moeten we aantallen tellen, maar het is niet de bedoeling dat je dat door de computer laat doen. Daarom vragen we steeds een algebraïsche toelichting. De som van de cijfers van N_i kan daarbij een belangrijke rol spelen.
Je moet daarom bij alle tel-vragen niet alleen het tel-resultaat geven, maar ook de methode van tellen. Hoe eenvoudiger je methode, hoe meer punten voor de ladder.

Opgave 1 - Als de Olympiadepuzzel in 2018 was geweest, dus de rij die start met $N_0 = 2018$ en ook $m = 2018$, dan was er wel een herhaling (cykel) ontstaan, maar de rij wordt niet constant.
Echter dit jaar 2019 wordt de rij N-waarden die we krijgen met $N_0 = m = 2019$ na een tijdje wel constant en wel 17181. Dus $N = 17181$ en $m = 2019$ zijn ook maatjes. Tel hoe lang die rij is tot we vinden dat $N_i = N_{i+1}$.

Omdat we bij opgaven 2 en 3 alleen zoeken naar maatjes m, N is de index i niet van belang en kunnen we die weglaten.
Opgave 2a - Welk maatje m hoort bij $N = 87$?
Opgave 2b - We tellen het aantal paartjes m, N die maatjes zijn. Raad eens hoe we dat aantal tellen moeten voor alle $N \leq 100$.

Opgave 3a - Er zijn waarden van N waarmee voor niet te kleine m de opvolger van N gelijk is aan m, zoals bijvoorbeeld voor $N = 1$ die immers wordt opgevolgd door de som van de cijfers van $N \cdot M$ en dat is m voor elke m. Maar er zijn er meer. De vraag is natuurlijk: hoeveel?
Raad eens hoe we dat aantal tellen moeten voor alle $N \leq 100$.
Opmerking: Met niet te kleine m bedoelen we dat $m \geq$ aantal cijfers van N.

Opgave 3b - Idem maar nu voor $N \leq 10000$.

Met elke $N_0 = m$ krijgen we altijd een rij getallen met vaak een aanloop en dan een cykel zoals voor $N_0 = m = 2018$.
Frans heeft met de computer bepaald dat voor elke rij die start met $N_0 = m < 10000$ je altijd in uiterlijk 14 stappen weer een N_i vindt die al eerder in de rij voorkomt, dus zeker met een cykel van lengte maximaal 14.

Opgave 4 - Raad eens hoe we moeten tellen wat de grootste cykel is van de rijen die starten met $m = 2$ (dus $M = 11$) en $N_0 < 100$?

Inzenden oplossingen

Gehele of gedeeltelijke oplossingen kun je weer mailen naar *liekewobien@hotmail.nl* of sturen naar
Lieke de Rooij, Oudeweg 27, 2811NN Reeuwijk.
Er zijn 20 punten te verdienen voor de ladderwedstrijd en extra punten als wij je idee voor een nieuwe puzzel gebruiken.
De aanvoerder van de ladder ontvangt een boekenbon ter waarde van 20 euro. En je hoeft helemaal niet alle vragen te beantwoorden om in te zenden en zo uiteindelijk toch bovenaan de ladder te komen!
Inzendingen moeten uiterlijk op 5 maart 2019 binnen zijn.


vakbladeuclides.nl/944puzzel

Top 10 ladderstand

tot en met puzzel 94-2	
M. Woldinga	144
F. van Hoeve	121
F. Göbel	114
G. Bouwhuis	114
R. Stolwijk	98
B. Groot	94
H. Bakker	91
M. Rijnierse	89
L. Cizkova	61
J. Verbakel	55

We feliciteren Monica Woldinga met de ladderprijs.

MEDEDELING



Nederlandse Wiskunde Olympiade

De eerste ronde van de Wiskunde Olympiade is in volle gang.
Verspreid over heel Nederland laten ruim driehonderd scholen hun leerlingen meedoen aan deze wedstrijd met verrassende en uitdagende wiskundeopgaven, waar nauwelijks voorkennis voor is vereist. De opgaven en uitwerkingen van de eerste ronde verschijnen begin februari op de website *www.wiskundeolympiade.nl*. Uiterlijk 11 februari wordt bekend welke duizend leerlingen verder mogen naar de tweede ronde. Daarnaast maken we rond die tijd ook de vier winnende scholen bekend: de beste school in alle categorieën, de school met de beste onderbouwleerlingen, de school met de beste vrouwelijke deelnemers en de beste nieuwe school (die sinds hooguit drie jaar meedoet). Wie weet valt jouw school dit jaar in de prijzen!

COLOFON

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Het blad verschijnt 7 maal per verenigingsjaar.

ISSN 0165-0394

Redactie
Tom Goris, hoofdredacteur
Liesbeth Coffeng, eindredacteur
Sebastiaan Benders
Rob Bosch
Hugo Duivesteijn
Ernst Lambeck
Sietske Tacoma
Henk Rozenhart, voorzitter
Gerrit van Wijk

Inzenden bijdragen
Tom Goris, Gebroeders van Doornestraat 12, 5614 BN Eindhoven
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen
Tekst digitaal in Word aanleveren, maximaal 1500 woorden. Illustraties en foto's apart digitaal aanleveren in hoge resolutie. Zie voor nadere aanwijzingen: vakbladeuclides.nl/richtlijnen

Realisatie
Ontwerp en vormgeving, fotografie, drukwerk en mailingservices.
De Kleuver bedrijfscommunicatie Veenendaal, www.dekleuver.nl

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren
Website: www.nvvw.nl

Voorzitter
Ebrina Smallengange
E-mail: voorzitter@nvvw.nl

Secretaris
Kees Garst, De Ruiter 25, 8252 EB Dronten
E-mail: secretaris@nvvw.nl

Ledenadministratie
Heleen van der Ree, Bladmos 23, 2914 AA Nieuwerkerk a/d IJssel
Tel. (0180) 32 10 97 E-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Helpdesk rechtspositie
NVvW - Rechtspositie-Adviesbureau,
Pijlkruid 7, 4102 KE Culemborg Tel. (0345) 531 324

Lidmaatschap
Het lidmaatschap van de NVvW is inclusief Euclides.
De contributie per verenigingsjaar bedraagt
met ingang van 1 augustus 2018
- leden: € 87,50
- leden, maar dan zonder *Euclides*: € 55,00
- studentleden (tot 27 jaar): € 40,00
- gepensioneerde leden € 45,00
- leden van de VVWL of het KWG: € 65,00

Bijdrage WwF (jaarlijks): € 2,50
Nieuwe leden dienen zich op te geven bij de ledenadministratie.
Opzeggingen moeten plaatsvinden vóór 1 juli.
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Abonnementen *Euclides* niet-leden
Abonnementen gelden steeds vanaf nr. 1 van de lopende jaargang
Personen (niet-leden van de NVvW): € 70,00
Instituten en scholen: € 150,00
Losse nummers zijn op aanvraag leverbaar: € 20,00
Betaling binnen 30 dagen na factuurdatum.

Advertenties en bijsluiters
De Kleuver bedrijfscommunicatie
Kerkewijk 63, 3901 EC Veenendaal, Tel. (0318) 555 075
E-mail: secretariaat@dekleuver.nl

KALENDER

In de kalender kunnen alle voor wiskundeleraren toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen.
Relevante data graag zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur
E-mail: vakbladeuclides@nvvw.nl

2019

vr 1/2 t/m 2/2
VELDHOVEN
Nationale Wiskunde Dagen
Organisatie: Freudenthal Instituut

wo 6/2
LANDELIJK
OnderbouwWiskundeDag
Organisatie: Freudenthal Instituut

di 12/3
NIJKERK
Examenconferentie Nijkerk
Organisatie: NVvW

do 21/3
LANDELIJK
Op de scholen: W4Kangoeroewedstrijd, wereldwijde wiskundewedstrijd
Organisatie: Stichting Wiskunde Kangoeroe

di 23/4 t/m 24/4
VELDHOVEN
Nederlands Mathematisch Congres
Organisatie: KWG en PWN

Hieronder staan de verwachte verschijningsdata en de bijbehorende deadlines vermeld voor het inzenden van mededelingen en van de eindversies van geaccepteerde bijdragen; zie daarvoor ook *vakbladeuclides.nl*

JAARGANG 94

nr.	verwachte verschijningsdatum	deadline
5	19 maart 2019	7 januari 2019
6	7 mei 2019	4 maart 2019
7	25 juni 2019	29 april 2019